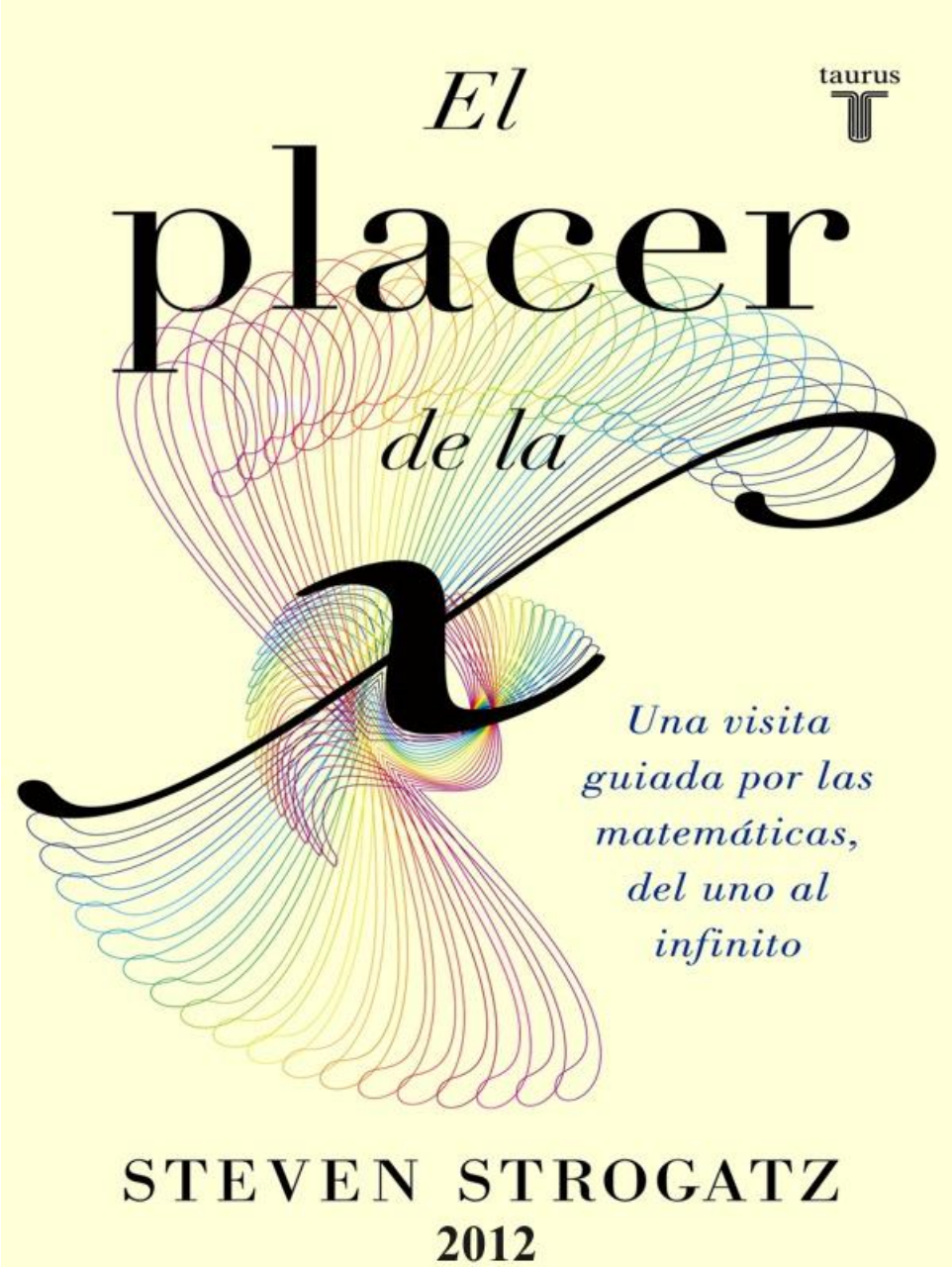

taurus
El
placer
de la
Una visita
guiada por las
matemáticas,
del uno al
infinito
STEVEN STROGATZ
2012

Sinopsis

¿Qué relación guardan los números con la literatura, el amor o la cultura pop? ¿Cuánto de exacto tiene la vida cotidiana? Un recorrido diferente por el asombroso mundo de las matemáticas.

Un matemático de primer nivel y prestigioso divulgador del *New York Times* nos invita a una visita guiada por las grandes ideas de las matemáticas y sus sorprendentes conexiones con la literatura, la filosofía, la medicina o el arte.

Las matemáticas están en la base de todo lo que hay en el cosmos, incluidos nosotros mismos, y, sin embargo, muy pocos entienden lo suficiente este idioma universal como para gozar de su sabiduría, su belleza… y sus placeres. Este libro lo traduce para convertirlo en algo inteligible y apasionante.

Cada capítulo ofrece inesperados momentos de revelación: desde la explicación de por qué los números son tan útiles (y tan eficaces para describir el mundo) hasta los escondidos encantos del cálculo, las elipses y el teorema de Pitágoras. Steven Strogatz solo pide a sus lectores curiosidad y sentido común. A cambio, *El placer de la X* les ofrecerá explicaciones claras e ingeniosas de los principios esenciales de esta disciplina y de su extraordinario poder para responder a muchas de las preguntas de la vida cotidiana.

El autor, premiado y elogiado por sus ensayos y artículos en múltiples medios de comunicación como *The New York Times*, *New Yorker*, *Discover* o *Science*, es reconocido internacionalmente por su manera didáctica de abarcar y exponer las matemáticas y otras disciplinas relacionadas.

Índice

Sinopsis
Prefacio
- Parte 1. Números
- Parte 2. Relaciones
- Parte 3. Formas
- Parte 4. Cambio
- Parte 5. Datos
- Parte 6. Fronteras

Agradecimientos

Prefacio

Tengo un amigo que, a pesar de ser artista, disfruta mucho de la ciencia. Cada vez que nos reunimos, lo único que quiere hacer es charlar acerca de lo último en psicología o en mecánica cuántica. Pero en lo que respecta a las matemáticas se siente perdido, y eso le entristece. Los extraños símbolos le ahuyentan. Dice no saber siquiera pronunciarlos.

De hecho, su alienación es más profunda. No tiene claro qué hace un matemático durante todo el día, o a qué se refieren cuando afirman que determinada demostración es elegante. A veces bromeamos con que debería sentarme con él y enseñárselo todo, empezando con 1 + 1 = 2 hasta llegar lo más lejos posible.

Por alocado que parezca, eso es lo que intentaré hacer en este libro. Se trata de un viaje guiado por los elementos de la matemática, desde preescolar hasta la universidad, pensado para cualquiera que desee tener una segunda oportunidad con la materia, esta vez desde una perspectiva adulta. No pretende ser una clase de recuperación. El objetivo es dar una mejor idea de las matemáticas y de por qué resultan tan apasionantes para aquellos que las captan.

Descubriremos cómo los mates de Michael Jordan pueden explicar los fundamentos del cálculo. Les mostraré una manera simple —y alucinante— de entender ese pilar de la geometría: el teorema de Pitágoras. Trataremos de llegar al fondo de algunos de los misterios de la vida, grandes y pequeños: ¿Mató O. J. Simpson a su mujer? ¿Cómo debe voltear el colchón para aprovecharlo al máximo? ¿Con cuántas personas debe salir antes de sentar la cabeza? Y veremos también por qué algunos infinitos son mayores que otros.

Las matemáticas están en todas partes, si sabe dónde mirar. Detectaremos curvas sinusoidales en las rayas de las cebras, escucharemos ecos de Euclides en la Declaración de Independencia de Estados Unidos y reconoceremos señales de números negativos en vísperas de la Primera Guerra Mundial. Y veremos cómo nuestras vidas hoy son tocadas por nuevos tipos de matemática, mientras buscamos restaurantes online y tratamos de entender —por no decir sobrevivir a— los temibles vaivenes de la bolsa.

Por una casualidad que parece encajar solo en un libro sobre números, este nació el día que cumplí cincuenta años. David Shipley, responsable entonces de la sección de Opinión de *The New York Times*, me había invitado a comer en el gran día (inconsciente de su significado semicentenario) para preguntarme si estaría dispuesto a escribir una serie de artículos sobre matemáticas para sus lectores. Me

fascinó la idea de compartir los placeres de la matemática con un público que fuera más allá de mi inquisitivo amigo el artista.

«Los elementos de las matemáticas» apareció online a finales de enero de 2010 y duró quince semanas. En respuesta, llovieron cartas y comentarios por parte de lectores de todas las edades. Muchos de los que escribieron eran alumnos y profesores. Otros eran gente curiosa que, por alguna razón, habían descarrilado en algún momento de su educación matemática, pero sentían que se estaban perdiendo algo que merecía la pena y querían intentarlo de nuevo. Fueron especialmente gratificantes los comentarios que recibí por parte de padres agradeciéndome que les hubiera ayudado a explicar matemáticas a sus hijos y, en el proceso, a ellos mismos. Incluso mis colegas y compañeros aficionados a las matemáticas parecían disfrutar las entregas, cuando no sugerían mejoras (o, quizá, especialmente cuando lo hacían).

En términos generales, la experiencia me convenció de que existe un hambre de matemáticas, profunda pero poco reconocida, entre el público general. A pesar de todo lo que oímos acerca de la fobia a las matemáticas, mucha gente *quiere* entender la materia algo mejor. Y una vez que lo logra, la encuentran adictiva.

El placer de la X es una introducción a los conceptos más persuasivos y profundos de las matemáticas. Los capítulos —algunos de la serie original de *The New York Times*— son pequeños bocados independientes, así que siéntase libre de picar allá donde quiera. Si desea ahondar más en cualquier apartado, las notas al final del libro proporcionan detalles adicionales y sugerencias bibliográficas.

Para beneficio de los lectores que prefieren un acercamiento paso a paso, he organizado el material en seis partes principales, siguiendo las líneas del plan de estudios tradicional.

La primera parte, «Números», comienza nuestro viaje con aritmética de preescolar y primaria, destacando lo útiles que pueden ser los números y lo asombrosamente efectivos que resultan para describir el mundo.

La segunda parte, «Relaciones», amplía el trabajar con números a trabajar con *relaciones* entre números. Estas son las ideas que laten en el corazón del álgebra. Lo que las hace tan cruciales es que ofrecen las primeras herramientas para describir cómo una cosa afecta a otra, a través de los principios de causa y efecto, oferta y demanda, dosis y respuesta, etcétera. En otras palabras, los tipos de relación que hacen el mundo complejo y rico.

La tercera parte, «Formas», cambia de números y símbolos a formas y espacio —el reino de la geometría y la trigonometría—. Además de caracterizar visualmente las cosas, estas materias elevan la matemática a nuevos niveles de rigor a través de la lógica y la demostración.

En la cuarta parte, «Cambio», llegamos al cálculo, la rama más penetrante y fructífera de las matemáticas. El cálculo hizo posible predecir el movimiento de los planetas, el ritmo de las mareas y, prácticamente, toda forma de cambio continuo en el universo y en nosotros mismos. Aprovechando el inmenso poder del infinito, el cálculo finalmente pudo resolver problemas de larga data que habían desafiado a los antiguos y condujo a la revolución científica y al mundo moderno.

La quinta parte, «Datos», se ocupa de la probabilidad, estadística, redes y minería de datos. Todas ellas materias relativamente jóvenes inspiradas en el lado desordenado de la vida: azar, suerte, incertidumbre, riesgo, volatilidad, aleatoriedad, interconexión. Con la matemática correcta, y los datos correctos, veremos cómo extraer significado del remolino.

Acercándonos al final del viaje, en la sexta parte, «Fronteras», nos aproximamos al filo del conocimiento matemático, la frontera entre lo que se conoce y lo que permanece esquivo. La secuencia de capítulos sigue la estructura familiar que hemos empleado —números, relaciones, formas, cambio e infinito—, pero cada tema se revisita en mayor profundidad y fiel a su encarnación moderna.

Espero que todas las ideas que vienen procuren alegría y un buen número de «¡Ajás!». Pero cualquier viaje necesita comenzar por el principio, así que empecemos con el simple y mágico acto de contar.

Primera Parte
Números

Contenido:

§1. Empezar contando peces y llegar al infinito
§2. Menos da una Piedra
§3. El enemigo de mi enemigo
§4. Conmutando
§5. El malestar en la división
§6. Ubicación, ubicación, ubicación

§1. Empezar contando peces y llegar al infinito

La mejor introducción a los números que he visto —la explicación más clarividente y graciosa de lo que son y de por qué los necesitamos— aparece en un vídeo de *Barrio Sésamo* llamado *1, 2, 3 cuenta conmigo*[1]. Humphrey, un tipo afable pero algo mentecato, de pelaje rosa y nariz verde, está trabajando en el turno de comidas del hotel de los Brazos Peludos, cuando atiende la llamada de una habitación llena de pingüinos. Humphrey escucha con atención y grita sus pedidos a la cocina: «Pez, Pez, Pez, Pez, Pez, Pez». Esto lleva a Epi a ilustrarle acerca de las virtudes del número seis.

«Sesame Workshop»®, «Sesame Street»® y los personajes, marcas y elementos de diseño asociados son propiedad de y están autorizados por Sesame Workshop. © 2011 Sesame Workshop. Todos los derechos reservados.

Los niños aprenden así que los números son fantásticos atajos. En lugar de decir la palabra «pez» tantas veces como pingüinos haya, Humphrey podría utilizar el concepto superior que representa «seis».

Como adultos, sin embargo, podemos advertir una desventaja potencial. Claro que los números nos ahorran tiempo, pero a costa de un alto precio en términos de abstracción. Seis es más etéreo que seis peces, precisamente porque es más general. Sirve para seis unidades de cualquier cosa: seis platos, seis pingüinos, seis expresiones de la palabra «pez». Todos tienen en común la inefabilidad.

Desde esta perspectiva, los números empiezan a resultar un poco misteriosos. Parecen pertenecer a alguna clase de reino platónico, a un nivel por encima de la realidad. En ese sentido, se parecen más a conceptos elevados, como los de verdad o justicia, y menos a los objetos cotidianos. Su estatus filosófico se vuelve incluso más oscuro en una reflexión más profunda. ¿De dónde vienen exactamente los números? ¿La humanidad los inventó o los descubrió?

Una sutileza adicional es que los números (de hecho, todas las ideas matemáticas) tienen vida propia[2]. No podemos controlarlos. Aunque existen en nuestras cabezas, una vez decidimos qué expresamos mediante ellos, no podemos intervenir en cómo se comportan. Obedecen a ciertas reglas y poseen ciertas propiedades, personalidades y maneras de combinarse unos con otros, y no hay nada que podamos hacer, salvo observar y tratar de comprender. En ese sentido, son extrañamente evocadores de los átomos y las estrellas, cosas de este mundo también sujetas a leyes que trascienden nuestro control, con la salvedad de que esas cosas existen fuera de nuestras cabezas.

Este aspecto dual de los números —parte Cielo, parte Tierra— es tal vez su rasgo más paradójico y el rasgo que los hace tan útiles. Es lo que el médico Eugene Wigner tenía en mente cuando escribió acerca de «la efectividad irracional de las matemáticas en las ciencias naturales»[3].

Por si no ha quedado claro a qué me refiero al hablar de los números y de su incontrolable comportamiento, volvamos al hotel de los Brazos Peludos. Supongamos que antes de que Humphrey haga el pedido de los pingüinos, recibe repentinamente una llamada de una habitación ocupada por el mismo número de pingüinos, todos ellos también exigiendo pescado. Tras atender ambas llamadas, ¿qué debería gritar Humphrey a cocina? Si no ha aprendido nada, debería gritar «pez» una vez por cada pingüino. Si usara los números, pediría seis raciones de

pescado para la primera habitación y seis más para la segunda. Pero lo que realmente necesita es un nuevo concepto: la suma. Una vez que lo domine, dirá orgulloso que necesita seis más seis (o, si quiere presumir, doce) peces.

El proceso creativo aquí es el mismo que nos aportó los números. Al igual que los números son atajos para contar de uno en uno, la suma es un atajo para contar cualquier cantidad. Así crece la matemática. La abstracción correcta lleva a una nueva visión y a un nuevo poder.

En poco tiempo, hasta Humphrey se dará cuenta de que puede seguir contando para siempre.

Sin embargo, a pesar de este panorama infinito, siempre hay límites a nuestra creatividad. Podemos decidir qué queremos decir con cosas como «6» y «+», pero una vez lo hagamos, expresiones como 6 + 6 quedarán fuera de nuestro control. La lógica no nos da elección. En ese sentido, las matemáticas siempre implican invención *y* descubrimiento: inventamos los conceptos pero descubrimos sus consecuencias. Como veremos en los capítulos venideros, nuestra libertad, dentro de las matemáticas, radica en las preguntas que hacemos —y en cómo las acechamos—, pero no en las respuestas que nos deparan.

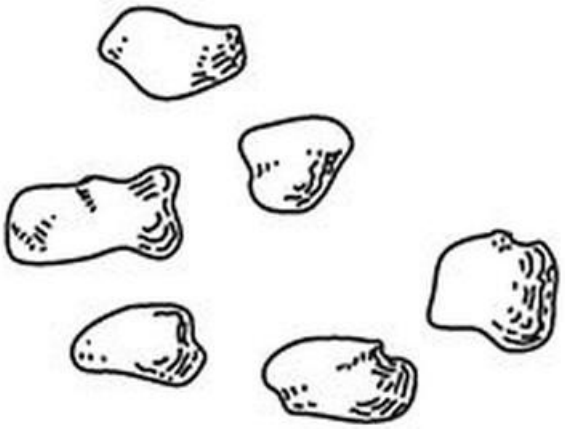
§2. Menos da una piedra

Como todo lo demás, la aritmética tiene su lado serio y su lado lúdico.

El lado serio es lo que todos aprendimos en el colegio: cómo trabajar con columnas de números, sumando, restando, estrujándolos en las hojas de cálculo para la declaración de la renta y los informes anuales. Este lado de la aritmética es importante, práctico y —para muchas personas— carente de toda gracia.

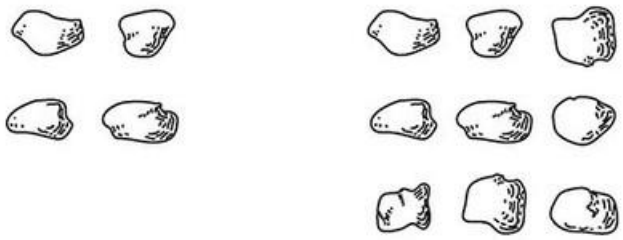
El lado lúdico de la aritmética[4] es mucho menos familiar, salvo que se tenga formación en matemática avanzada, aunque no hay nada inherentemente avanzado en él. Es tan natural como la curiosidad de un niño[5].

En su libro *A Mathematician's Lament* [El lamento de un matemático], Paul Lockhart aboga por un enfoque educativo en el que los números son tratados de manera más concreta de lo normal: nos pide que los imaginemos como grupos de piedras. Por ejemplo, el 6 corresponde a un grupo de piedras como este:

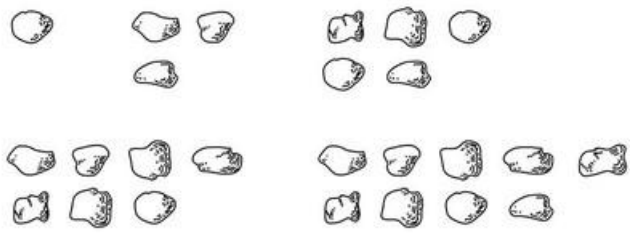


Es probable que no vea aquí nada llamativo, y eso está bien: salvo que exijamos más a los números, todos parecen prácticamente iguales. Nuestra ocasión de ser creativos viene en lo que exigimos a los números.

Por ejemplo, centrémonos en grupos que tienen entre 1 y 10 piedras y preguntémonos cuáles pueden reorganizarse en patrones cuadrados. Solo dos de ellos pueden: el grupo de 4 y el grupo de 9. Y esto es porque $4 = 2 \times 2$ y $9 = 3 \times 3$; obtenemos estos números elevando al cuadrado otros números (de hecho, haciendo una forma cuadrada).

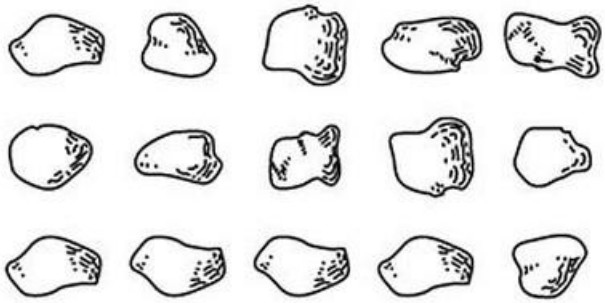


Un reto menos severo es identificar grupos de piedras que puedan organizarse en rectángulo, exactamente con dos filas que salgan a la par. Esto es posible mientras que haya 2, 4, 6, 8 o 10 piedras; el número tiene que ser par. Si intentamos forzar cualquiera de los otros números del 1 al 10 —los impares— a formar en dos filas, siempre sobresaldrá una pequeña parte.



Aun así, no todo está perdido para estos números inadaptados. Si sumamos dos de ellos, sus protuberancias encajan y la suma sale par; impar + impar = par.

Si aflojamos las normas hasta admitir números mayores a 10 y permitimos patrones rectangulares con más de dos filas de piedras, algunos números impares muestran su talento para hacer estos rectángulos más grandes. Por ejemplo, el número 15 puede formar un rectángulo 3 × 5:



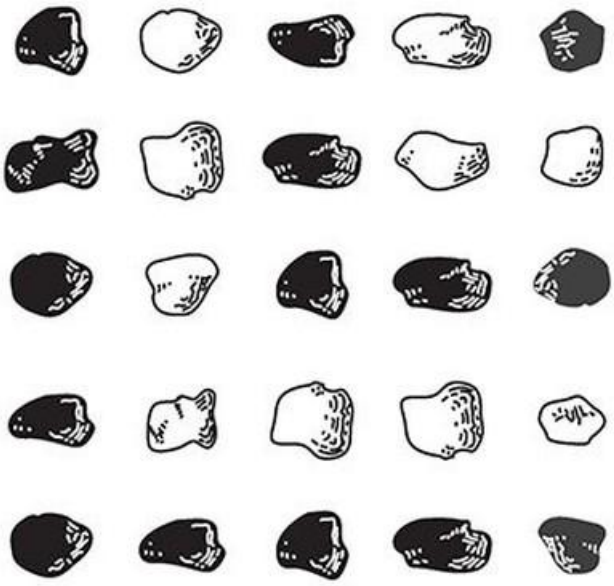
Por lo tanto, el 15, aunque indudablemente impar, al menos tiene el consuelo de ser un número compuesto —se compone de tres filas de cinco piedras cada una—. Del mismo modo, cualquier entrada alterna en la tabla de multiplicar produce su propio grupo rectangular.

Pero lo de algunos números, como el 2, 3, 5 y 7, no tiene remedio. Ninguno de ellos puede formar rectángulo alguno, más allá de una simple fila de piedras (una fila única). Estos números, extrañamente inflexibles, son los famosos números primos.

Vemos, pues, que los números tienen peculiaridades estructurales que les dotan de personalidad. Pero para ver el pleno alcance de su comportamiento, necesitamos ir más allá de los números individuales y observar qué les sucede cuando interactúan.
Por ejemplo, en lugar de sumar solo dos números impares, supongamos que sumamos todos los números impares consecutivos, empezando por el uno:

$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Estas sumas, extraordinariamente, siempre resultan en cuadrados perfectos. (Vimos el 4 y el 9 en los patrones cuadrados anteriores, y $16 = 4 \times 4$, y $25 = 5 \times 5$). Una demostración rápida muestra que esta norma se mantiene en números impares más y más grandes; aparentemente se sostiene hasta el infinito. Pero ¿qué conexión puede haber entre los números impares, con sus apéndices desgarbados, y los números tradicionalmente simétricos que forman cuadrados? Colocando las piedras de manera adecuada, podemos hacer que esta relación parezca obvia: el sello distintivo de una demostración elegante[6].
La clave es reconocer que los números impares pueden hacer formas de L, dejando las protuberancias en una esquina. Y al unir sucesivamente formas de L, se obtiene un cuadrado.



Este tipo de ideas aparece en otro libro reciente, aunque por razones literarias totalmente distintas. En la encantadora novela de Yoko Ogawa *La fórmula preferida del profesor*, una inculta pero astuta joven con un hijo de diez años es contratada para ocuparse de un anciano matemático que ha sufrido una traumática lesión cerebral. La lesión le limita la memoria a corto plazo a ocho minutos. A la deriva en el presente y solo en su destartalada casa de campo, sin más compañía que sus números, el profesor trata de conectar con la criada de la única manera que sabe: preguntando su talla de calzado o cumpleaños y teniendo una charla matemática en torno a su estadística. El profesor también tiene especial simpatía por el hijo de la criada, al que llama «Raíz», puesto que la parte superior de su cabeza es plana y le recuerda al símbolo de la raíz cuadrada (√).

Un día el profesor propone a Raíz un pequeño acertijo: le pide que encuentre la suma de todos los números de 1 a 10. Después de que Raíz haya sumado con atención los números, vuelve con la respuesta: 55, pero el profesor le pide que encuentre una manera mejor. ¿Podría dar con la respuesta *sin* sumar los números? Raíz patea la silla y grita: «¡Eso no es justo!».

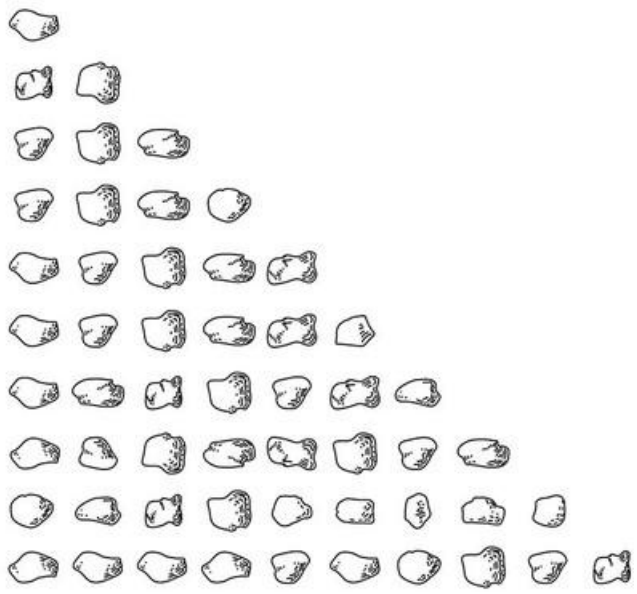
Poco a poco, la criada se ve atraída hacia el mundo de los números, y en secreto comienza a estudiar el acertijo. «No estoy segura de por qué me absorbió tanto un problema matemático infantil, sin ninguna utilidad», dice. «En un principio, era consciente de querer agradar al profesor, pero gradualmente ese sentimiento se

desvaneció y reparé en que se había convertido en una batalla entre el problema y yo. Cuando me levantaba por la mañana, la ecuación me estaba esperando:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 = 55$$

y me seguía durante el día, como si se me hubiera grabado en la retina y fuera imposible ignorarla».

Hay varias maneras de resolver el problema del profesor (a ver cuántas puede encontrar usted). El propio profesor arguye en torno a lo que hemos desarrollado anteriormente. Interpreta la suma de 1 a 10 como un triángulo de piedras, con 1 piedra en la primera fila, 2 en la segunda, y así hasta 10 piedras en la décima fila:

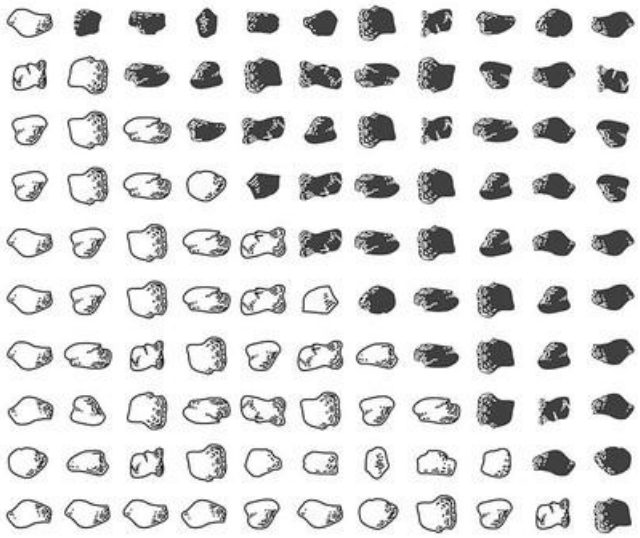


Por su propia apariencia, este dibujo da un claro sentido de espacio negativo. Parece estar a medio completar. Y eso sugiere un salto creativo. Si copiamos el triángulo, le damos la vuelta y lo sumamos como la parte faltante, obtenemos algo mucho más simple: un rectángulo con 10 filas de 11 piedras cada uno y un total de 110.

Puesto que el triángulo original es la mitad de este rectángulo, la suma deseada debe ser la mitad de 110, o sea, 55.

Observar los números como grupos de piedras puede parecer inusual, pero en realidad es algo tan viejo como la matemática misma. La palabra «calcular» refleja ese legado, viene de la palabra latina *calculus*, que se refiere a un guijarro

empleado para contar. Para disfrutar el trabajo con números no hace falta ser Einstein (en alemán: «una piedra»), pero puede resultarle útil tener alguna piedra en la cabeza.



§3. El enemigo de mi enemigo"

Es tradición enseñar a los niños la resta justo después de la suma. Tiene sentido: ambas se sirven de los mismos hechos numéricos, aunque al revés. Y el misterioso arte de tomar prestado, tan crucial para una resta exitosa, es solo un poco más complejo que aquel de aportar (su equivalente para la suma). Si usted puede hacer frente al cálculo de 23 + 9, muy pronto estará preparado para 23 − 9.

En un nivel más profundo, sin embargo, la resta plantea un asunto mucho más inquietante que la suma nunca plantea. La resta puede generar números negativos. Si intento quitarte 6 galletas y solo tienes 2, me será imposible, salvo en mi cabeza, donde ahora tengo 4 galletas negativas, signifique eso lo que signifique.

La resta nos fuerza a expandir nuestra concepción de lo que son los números. Los números negativos son mucho más abstractos que los positivos: no podemos ver 4 galletas negativas y, por supuesto, no podemos comérnoslas, pero podemos pensar en ellas, y *tenemos* que pensar en ellas en todos los aspectos de la vida diaria, desde las deudas y sobregiros, hasta para combatir temperaturas heladas y parkings subterráneos.

Aun así, muchos no hemos hecho las paces con los números negativos. Como ha señalado mi colega Andy Ruina, la gente ha inventado estrategias de todo tipo para dejar de lado el temido signo negativo. En las declaraciones de fondos colectivos,

las pérdidas (números negativos) se imprimen en rojo o se ubican entre paréntesis sin signo negativo alguno. Los libros de historia dicen que Julio César nació en el año 100 a. C., no en el −100. Los niveles subterráneos en los parkings normalmente se conocen como S1 y S2. La temperatura es una de las pocas excepciones: la gente sí dice, especialmente aquí en Ithaca, Nueva York, que fuera hace −5 grados, aunque incluso en este caso muchos prefieren decir 5 bajo cero. Hay algo en los números negativos que resulta tan desapacible, tan… negativo.

Quizá lo más perturbador es que negativo multiplicado por negativo sea positivo. Por lo tanto, permítanme que explique la idea que hay detrás.

¿Cómo debemos definir el valor de una expresión como -1×3, donde estamos multiplicando un número negativo por un número positivo? Bueno, de la misma manera que 1×3 significa $1 + 1 + 1$, la definición natural de -1×3 es $(-1) + (-1) + (-1)$, que iguala a -3. Esto resulta obvio en términos de dinero: si usted me debe 1 dólar a la semana, tres semanas después me deberá 3 dólares.

Partiendo desde aquí, estamos a un pequeño paso de entender por qué negativo por negativo debe ser positivo. Observe la siguiente cadena de ecuaciones:

$$-1 \times 3 = -3$$
$$-1 \times 2 = -2$$
$$-1 \times 1 = -1$$
$$-1 \times 0 = 0$$
$$-1 \times -1 = ?$$

Ahora observe los números de la derecha y repare en su progresión: −3, −2, −1, 0,… En cada paso añadimos 1 al número que lo precede. ¿No está de acuerdo con que el número siguiente lógicamente debería ser 1?

Esa es una razón de por qué $(-1) \times (-1) = 1$. Lo atractivo de esta definición es que conserva las reglas de la aritmética ordinaria; lo que funciona para los números positivos, funciona también para los negativos.

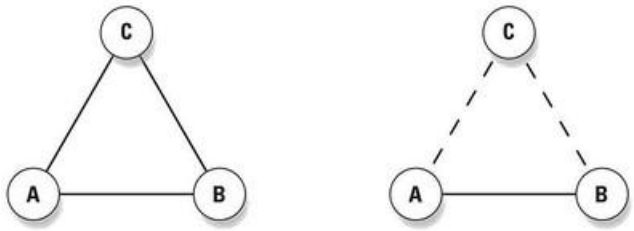
Pero si usted es un pragmático riguroso, se preguntará si estas abstracciones tienen algún paralelismo con el mundo real. Es cierto que a veces la vida parece funcionar con reglas distintas: en la moral convencional, dos errores no hacen un acierto. Del mismo modo, dobles negativos no siempre equivalen a positivos, incluso pueden hacer los negativos más intensos, como en la frase «I can’t get no satisfaction» [No puedo obtener ninguna satisfacción]. De hecho, los idiomas pueden ser engorrosos

a este respecto. El eminente filósofo del lenguaje J. L. Austin de Oxford dio una conferencia en la que afirmaba que existen muchos idiomas en los que un doble negativo hace un positivo, pero ninguno en que un doble positivo hiciera un negativo, a lo que el filósofo de la Universidad de Columbia, Sidney Morgenbesser, sentado entre el público, contestó: «Sí, sí…»[7].

Sin embargo, hay muchos casos en los que el mundo real refleja las normas de los números negativos. El disparo de una neurona puede ser inhibido por el disparo de una segunda neurona. Si esa segunda neurona es inhibida por una tercera, la primera neurona puede disparar de nuevo. La acción indirecta de la tercera neurona sobre la primera equivale a la excitación; una cadena de dos negativos hace un positivo. Efectos similares tienen lugar en la regulación genética: una proteína podría activar un gen bloqueando otra molécula que estuviera reprimiendo ese tramo de ADN.

El paralelismo más familiar quizá ocurra en lo social y lo político, como resume el dicho: «El enemigo de mi enemigo es mi amigo». Esta perogrullada, y otras parecidas acerca del amigo de mi enemigo, el enemigo de mi amigo, etcétera, pueden ser representadas en triángulos de relación[8].

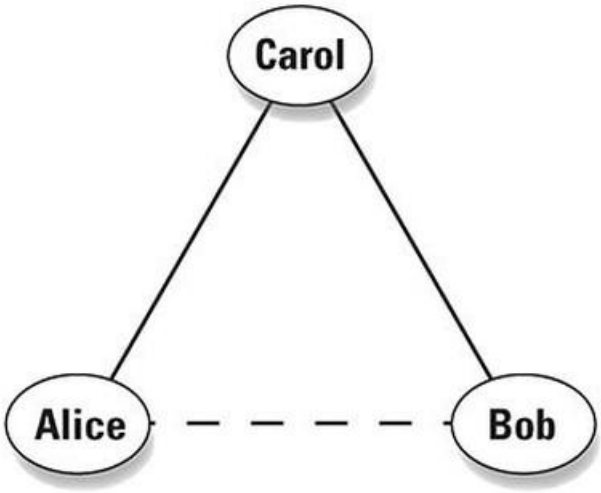
Las esquinas simbolizan a las personas, compañías o países y los lados que los conectan simbolizan sus relaciones, que pueden ser positivas (amistosas: representadas por líneas continuas) o negativas (hostiles: representadas por líneas discontinuas).



Los científicos sociales se refieren a triángulos como el de la izquierda, con todos los lados positivos, como equilibrados: no hay razón para cambiar cómo se siente alguien, ya que es razonable que le caigan bien los amigos de sus amigos. Igualmente, el triángulo de la derecha, con dos lados negativos y uno positivo, se considera equilibrado porque no provoca disonancias; aunque permite hostilidad, nada cimienta una relación mejor que odiar a la misma persona.

Por supuesto que los triángulos pueden ser también desequilibrados. Cuando tres enemigos íntimos miden la situación, dos de ellos —normalmente los dos con la menor animosidad entre sí— pueden estar tentados a unir sus fuerzas y conspirar contra el tercero.

Más desequilibrado está un triángulo con una única relación negativa. Por ejemplo, supongamos que Carol se lleva bien tanto con Alice como con Bob, pero Bob y Alice se odian. Quizá en su día fueron pareja, pero sufrieron una desagradable ruptura y cada uno critica al otro ante la siempre leal Carol. Esto provoca estrés psicológico en todos los frentes. Para recuperar el equilibrio, o bien Alice y Bob se reconcilian, o Carol tendrá que decidirse por una de las partes.

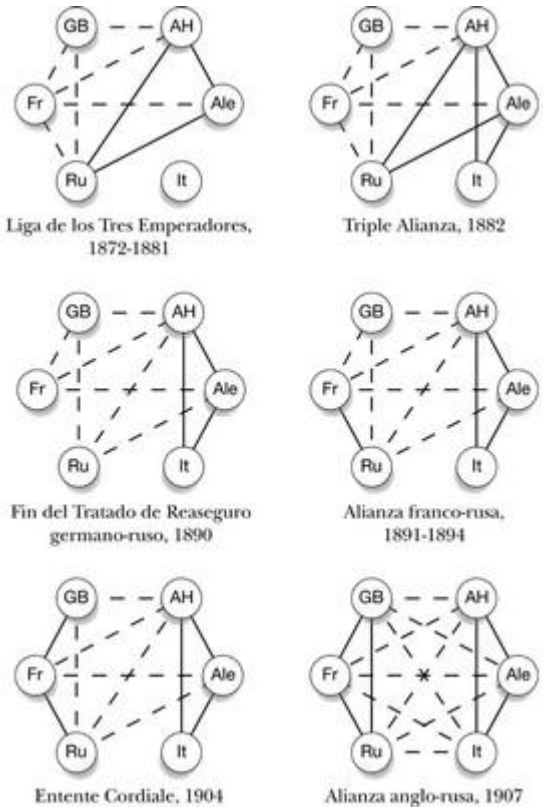


En todos estos casos, la lógica del equilibrio coincide con la lógica de la multiplicación. En un triángulo equilibrado, el signo del producto de cualesquiera dos lados, positivo o negativo, siempre coincide con el signo del tercero. En triángulos desequilibrados, este patrón se rompe.

Dejando a un lado la verosimilitud del modelo, siempre surgen preguntas interesantes de cariz puramente matemático. Por ejemplo, en una red muy unida, donde todo el mundo se conoce, ¿cuál es el estado más estable? Una posibilidad es un nirvana de buenas intenciones donde todas las relaciones sean positivas y todos los triángulos de la red estén equilibrados. Pero, sorprendentemente, existen otros estados igualmente estables. Estos son estados de conflicto inalterable, con la red escindida en dos facciones hostiles (de tamaño y composición arbitrarios). Todos los miembros de una facción son amigos entre sí pero hostiles hacia los

pertenecientes a la otra facción. ¿Le suena familiar? Resulta incluso más sorprendente que estos estados polarizados sean los *únicos* estados tan estables como el nirvana[9]. Particularmente, ninguna división tripartita puede tener todos sus triángulos equilibrados.

Los estudiosos han empleado estas ideas para analizar el periodo previo a la Primera Guerra Mundial[10]. El diagrama siguiente muestra las alianzas cambiantes entre Gran Bretaña, Francia, Rusia, Italia, Alemania y Austria-Hungría entre 1872 y 1907.



Las primeras cinco configuraciones eran todas desequilibradas, en el sentido de que cada una contenía al menos un triángulo desequilibrado. La disonancia resultante tendía a empujar a estas naciones a realinearse, provocando reverberaciones en otros tramos de la red. En la etapa final, Europa se había dividido en dos bloques implacablemente opuestos, técnicamente equilibrados, pero al borde de la guerra.

La cuestión no es que esta teoría sea poderosamente predictiva, no lo es. Es demasiado simple como para dar cuenta de todas las sutilezas de la dinámica geopolítica. La cuestión es que mucho de lo que observamos se debe a poco más

que a la primitiva lógica de «el enemigo de mi enemigo», y *esa* parte queda perfectamente captada por la multiplicación de números negativos. Separando lo significativo de lo genérico, la aritmética de los números negativos puede ayudarnos a ver dónde reside el verdadero enigma.

§4. Conmutando

Más o menos cada década, aparece un nuevo acercamiento a la enseñanza de las matemáticas, lo que crea una ocasión para que muchos padres se sientan incompetentes. En la década de 1960, mis padres estaban pasmados ante su incapacidad para ayudarme con los deberes de segundo de primaria. Nunca habían oído hablar de la tercera base o de los diagramas de Venn.

Ahora se han vuelto las tornas. «Papá, ¿podrías ayudarme a resolver estas multiplicaciones?». «Claro», pensé, hasta que empezó el meneo de cabeza. «No, papá, así no es como hay que hacerlo. Ese método es de la vieja escuela. ¿No conoces el método *lattice?* ¿No? Bueno, ¿y los productos parciales?».

Estas sesiones de humillación me han impulsado a revisitar la multiplicación desde cero[11]. Y en realidad es bastante sutil, una vez que comienzas a pensarlo.

Tomemos la terminología. ¿Significa «siete por tres» «siete sumado a sí mismo tres veces»? ¿O «tres sumado a sí mismo siete veces»?

En algunas culturas el lenguaje es menos ambiguo. Un amigo de Belice solía recitar las tablas de multiplicar así: «Siete unos son siete, siete doses son catorce, siete treses son veintiuno», y así sucesivamente. Esta formulación aclara que el primer número es el multiplicador y el segundo número es aquello que se multiplica. Es la misma convención que aparece en la inolvidable letra de Lionel Richie «She's once, twice, three times a lady» [Ella es una, dos, tres veces una dama]: «Ella es una vez tres damas» nunca hubiera sido un éxito.

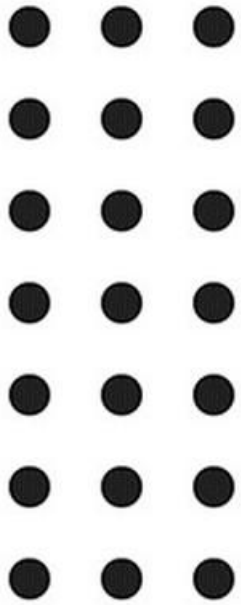
Puede ser que todo este alboroto semántico le parezca absurdo, puesto que el orden en que se multiplican los números no es importante: $7 \times 3 = 3 \times 7$. Hasta ahí de acuerdo, pero esto nos conduce a la cuestión en la que me gustaría profundizar: ¿es la propiedad conmutativa de la multiplicación, $a \times b = b \times a$, realmente tan obvia? Recuerdo sorprenderme con ella siendo niño, quizá a usted le sucedió lo mismo.

Para recuperar la magia, imagine no saber a qué equivale 7×3. Así que intente contar de siete en siete: 7, 14, 21. Ahora inviértalo y trate de contar de tres en tres: 3, 6, 9,… ¿Nota cómo aumenta el suspense? Hasta ahora, ninguno de los números

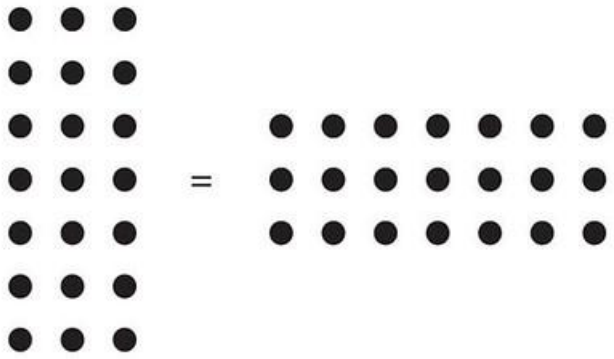
se corresponde con la lista del siete, pero continúe… 12, 15, 18, y entonces, bingo, ¡21!

La idea es que si contempla la multiplicación como sinónimo de contar repetidas veces (o, en otras palabras, de suma repetida), la propiedad conmutativa no es transparente.

Pero se hace más intuitiva si concebimos la multiplicación *visualmente*. Piense en 7 × 3 como en el número de puntos en una formación rectangular con siete filas y tres columnas.



Si gira la formación, se transforma en tres filas y siete columnas, y como rotar el dibujo no altera el número de puntos, debe ser cierto que 7 × 3 = 3 × 7.



$7 \times 3 = 3 \times 7$

Sin embargo, en muchas situaciones reales, especialmente aquellas en las que interviene el dinero, la gente parece olvidar la propiedad conmutativa, o no se percata de que es aplicable. Permítame que le dé dos ejemplos:

Suponga que está comprando unos pantalones vaqueros. Tienen una rebaja del 20 por ciento sobre el precio etiquetado: 50 dólares, lo cual suena a ganga, pero no olvide que también tiene que pagar el 8 por ciento de impuestos. Cuando la dependienta ha terminado de elogiar lo bien que le quedan, pone en marcha la compra, pero de pronto se detiene y suspira en tono conspiratorio: «Permítame que le ahorre algo de dinero. Le deduciré primero el IVA y luego sustraeré el 20 por ciento al total, así le saldrá más rentable, ¿vale?».

Pero hay algo que a usted le suena sospechoso. «No, gracias», dice. «¿Podría quitarme el 20 por ciento y luego aplicar el IVA? Así, pagaré menos impuestos».

Asumiendo que ambas acciones son legales, ¿qué método le conviene más?

Mucha gente se aproxima a una cuestión así de manera *sumatoria*. Calculan el IVA y el descuento en ambos casos y después realizan las sumas o restas necesarias para dar con el precio correcto. Usted razona que, haciéndolo como sugiere la dependienta, pagaría 4 dólares de IVA (8 por ciento de los 50 dólares marcados). Esto elevaría el total a 54 dólares. Por otra parte, aplicar el 20 por ciento a 54 dólares le devuelve 10,80 dólares, así que termina pagando 54 dólares, menos 10,80 dólares, es decir, 43,20 dólares, mientras que en su planteamiento el 20 por ciento de descuento se aplicaría con anterioridad, ahorrándole 10 de los 50 dólares. El IVA de ese precio reducido a 40 dólares sería 3,20 dólares, por lo que pagaría, igualmente, 43,20 dólares. ¡Increíble![12].

Simplemente, estamos ante la propiedad conmutativa en acción. Para ver por qué, piense de manera *multiplicativa*, no sumatoria. Aplicar el 8 por ciento de IVA seguido del descuento del 20 por ciento corresponde a multiplicar el precio etiquetado por 1,08 y después multiplicar el resultado por 0,80. Cambiar el orden del IVA y el descuento invierte la multiplicación, pero como 1,08 × 0,80 = 0,80 × 1,08, el precio final es el mismo.

Este tipo de consideraciones emergen también en importantes decisiones financieras[13]. ¿Es un Roth 401(k) mejor que un plan de jubilación tradicional? Generalizando, si usted tiene un montón de dinero para invertir y tiene que pagar impuestos en algún momento, ¿es mejor hacerlo al principio de la inversión o al final?

Una vez más, la propiedad conmutativa muestra que da lo mismo, siendo el resto de elementos iguales (algo que, tristemente, no suele suceder). Si, para ambos casos, su dinero crece en el mismo grado y tributa de la misma manera, no influye si paga los impuestos antes o después.

Por favor, no confunda estas aclaraciones matemáticas con asesoría financiera. Cualquiera que se enfrente a estas decisiones en la vida real necesita estar pendiente de muchas complicaciones que enfangan las aguas; por ejemplo, ¿espera estar en una categoría impositiva más alta o más baja cuando se jubile? ¿Apurará al máximo sus límites impositivos? ¿Cree que el gobierno cambiará su política de exención impositiva de las retiradas de capital para cuando decida sacar su dinero? Dejando de lado estas cuestiones (y no me malinterprete, todo ello es importante, simplemente estoy tratando de centrarme en un asunto matemático más sencillo), mi idea principal es que la propiedad conmutativa es relevante para el análisis de dichas decisiones.

Podrá encontrar debates acalorados sobre este tema en páginas de Internet dedicadas a *personal finance* [finanzas personales]: incluso después de que se haya resaltado la relevancia de la propiedad conmutativa, algunos blogueros no la aceptan, es contraintuitiva.

Quizá estamos programados para poner en duda la propiedad conmutativa porque en el día a día suele importar el orden de los factores. No puede comerse el pastel antes de hacerlo, y, cuando se quita los zapatos y calcetines, tiene que acertar el orden.

El físico Murray Gell-Mann llegó a una conclusión similar un día que estaba dándole vueltas a su futuro. Como universitario en Yale, quería desesperadamente

permanecer en las universidades de élite para realizar un posgrado. Por desgracia, Princeton rechazó su solicitud; Harvard dio el sí, pero parecía reticente a proporcionarle el apoyo financiero que necesitaba. Su mejor opción, aunque le parecía deprimente, era el MIT. A los ojos de Gell-Mann, el MIT era un instituto tecnológico mugriento, muy por debajo de su refinado gusto. No obstante, aceptó la oferta. Años después explicaría que había llegado a contemplar el suicidio en aquel momento, pero desistió al darse cuenta de que entrar en el MIT y suicidarse no conmutaban[14]. Podría ir al MIT y suicidarse más tarde si lo consideraba oportuno, pero no al revés.

Gell-Mann probablemente se había sensibilizado con la importancia de la no conmutatividad. Como físico cuántico, habría sido agudamente consciente de que, en el nivel más profundo, la naturaleza desobedece la propiedad conmutativa. Y eso es algo bueno, puesto que el fracaso de la conmutatividad es lo que hace que el mundo sea como es. Es la razón de que la materia sea sólida y de que los átomos no implosionen.

De hecho, en los inicios del desarrollo de la mecánica cuántica, Werner Heisenberg y Paul Dirac descubrieron que la naturaleza responde a una lógica curiosa en la que $p \times q \neq q \times p$, donde p y q representan el momento y posición de una partícula cuántica[15]. Sin esa ruptura de la propiedad conmutativa, no habría principio de incertidumbre de Heisenberg, los átomos colapsarían y nada existiría.

Por esta razón es conveniente que preste atención a sus p y a sus q, y que les diga a sus hijos que hagan lo mismo.

§5. El malestar en la división

Existe un hilo narrativo que recorre la aritmética, pero muchos nos lo perdimos en la densa niebla de las largas divisiones y los denominadores comunes. Es la historia de la búsqueda de números aún más versátiles.

Los números naturales, 1, 2, 3, etcétera, bastan si todo lo que queremos hacer es contar, sumar y multiplicar. Pero en el momento en que nos preguntamos qué queda cuando todo es sustraído nos vemos en la obligación de crear un nuevo número —cero—, y, como también pueden producirse deudas, necesitamos números negativos. Este universo agrandado de números, llamados enteros, es tan autosuficiente como el de los números naturales, pero mucho más poderoso, ya que comprende también la resta.

Surge una nueva crisis cuando tratamos de resolver la matemática del compartir. Dividir un número entero no es siempre posible…, a menos que expandamos de nuevo el universo, esta vez, inventando las fracciones. Estas son cocientes de números enteros, de ahí su nombre técnico: números racionales. Por desgracia, este es el lugar donde muchos estudiantes topan con el muro de las matemáticas.

Existen muchos elementos confusos acerca de la división y sus consecuencias, pero quizá lo más desesperante sea que haya tantas maneras de describir las partes de un todo.

Si cortase una tarta de chocolate justo por la mitad, en dos partes iguales, seguro que diría que cada porción es la mitad de la tarta. O expresaría la misma idea con la fracción $1/2$, que significa «1 de 2 trozos iguales». Cuando lo escribe de esta manera, la barra entre el 1 y el 2 es un recordatorio visual de que algo está siendo cortado. Una tercera manera de explicarlo sería decir que cada porción es un 50 por ciento del total, lo que significa —literalmente— «50 partes de 100». Por si esto no fuera suficiente, podría también invocar la notación decimal y describir cada porción como el 0,5 de la tarta completa.

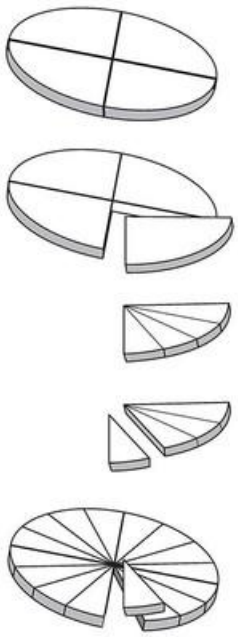
Esta abundancia de opciones puede, en parte, ser responsable de la confusión que muchos sentimos al enfrentarnos a las fracciones, porcentajes y decimales. Un ejemplo claro aparece en la película *Mi pie izquierdo*, la historia real del escritor, pintor y poeta irlandés Christy Brown[16]. Nacido en el seno de una familia numerosa de clase trabajadora, sufrió una parálisis cerebral que le impedía hablar o controlar cualquiera de sus miembros a excepción de su pie izquierdo. De niño, solían considerle discapacitado mental, especialmente su padre, que renegaba de él y le trataba con crueldad.

Una escena clave de la película sucede en torno a la mesa de la cocina. Una de las hermanas mayores de Christy está haciendo sus deberes de matemáticas en silencio, sentada junto a su padre. Mientras, Christy, como de costumbre, está relegado a la esquina, retorcido en su silla. Su hermana rompe el silencio: «¿Cuánto es el 25 por ciento de un cuarto de dólar?», pregunta. Su padre reflexiona: «¿25 por ciento de un cuarto de dólar? Ehhh… La pregunta es absurda. Quiero decir, 25 por ciento *es* un cuarto. No puedes tener un cuarto de un cuarto». La hermana responde: «Sí puedes, ¿a que sí, Christy?». El padre: «¡Ja! ¿Qué va a saber *este*?».

Retorciéndose, Christy se esfuerza para coger una tiza con su pie izquierdo. Colocándola sobre una pizarra en el suelo, logra garabatear un 1, luego una barra, luego algo ilegible. Es el número 16, pero el 6 sale al revés. Frustrado, borra el 6

con el talón y vuelve a intentarlo, pero esta vez la tiza va demasiado lejos, atravesando el 6 y volviéndolo indescifrable. «Eso no es más que un garabato nervioso», dice su padre dándole la espalda. Christy cierra los ojos y vuelve a reclinarse, agotado.

Más allá de la fuerza dramática de la escena, llama la atención la rigidez conceptual de su padre. ¿Qué le hace insistir en que no puede darse un cuarto de un cuarto? Quizá piense que solo puede obtenerse un cuarto de un todo, o de algo hecho de cuatro partes iguales. Pero no es consciente de que *todo* está constituido por cuatro partes iguales. En el caso de un objeto que es ya un cuarto, sus cuatro partes iguales tienen este aspecto:



Puesto que el total lo componen 16 de estas finas porciones, cada porción es 1/16 del total: la respuesta que Christy trataba de escribir.

Una versión —actualizada para la era digital— del mismo tipo de rigidez mental rondó por Internet hace unos años cuando un cliente frustrado llamado George Vaccaro grabó y colgó su conversación con dos empleados de atención al cliente de la compañía telefónica Verizon Wireless[17]. La reclamación de Vaccaro era que él había firmado una tarifa de datos de 0,002 céntimos por kilobyte, pero sus facturas mostraban que le habían cobrado 0,002 *dólares* por kilobyte, una tarifa cien veces más cara. La conversación que siguió entró en el top 50 de los vídeos cómicos de YouTube.

He aquí uno de los momentos destacados que acontece en el ecuador de la conversación, durante el intercambio entre Vaccaro y Andrea, la gerente de planta de Verizon:

V: ¿Reconoce que existe una diferencia entre un dólar y un céntimo?

A: Por supuesto.

V: ¿Reconoce que existe una diferencia entre medio dólar y medio céntimo?

A: Por supuesto.

V: Por lo tanto, ¿reconoce que existe una diferencia entre 0,002 dólares y 0,002 céntimos?

A: No.

V: ¿No?

A: Quiero decir… no existe 0,002 dólares.

Algunos momentos después, Andrea dice: «Evidentemente, un dólar es "uno, decimal, cero, cero", ¿no? Entonces, ¿qué aspecto tendría un "cero coma cero cero dos dólares"?… Nunca he oído hablar de 0,002 dólares… Es que no es un céntimo entero».

El reto de hacer la conversión entre dólares y céntimos es solo una parte del problema de Andrea. Su verdadera dificultad es la incapacidad de visualizar una porción de ninguno de ellos.

Por experiencia personal, puedo decirles cómo es eso de que te desconcierten los decimales. En octavo curso, la señorita Stanton comenzó a explicarnos cómo convertir una fracción en decimal. Empleando la división larga, descubrimos que algunas fracciones dan decimales que terminan en ceros. Por ejemplo, 1/4 = 0,2500…, que puede escribirse 0,25, ya que todos esos ceros no equivalen a nada. Otras fracciones dan decimales que al final se repiten, como:

$$5/6 = 0{,}8333\ldots$$

Mi preferida era 1/7, cuyo equivalente decimal se repite cada seis dígitos:

$$1/7 = 0{,}142857142857\ldots$$

El desconcierto empezó cuando la señorita Stanton señaló que si se triplican ambos lados de la ecuación simple:

= 0,3333…

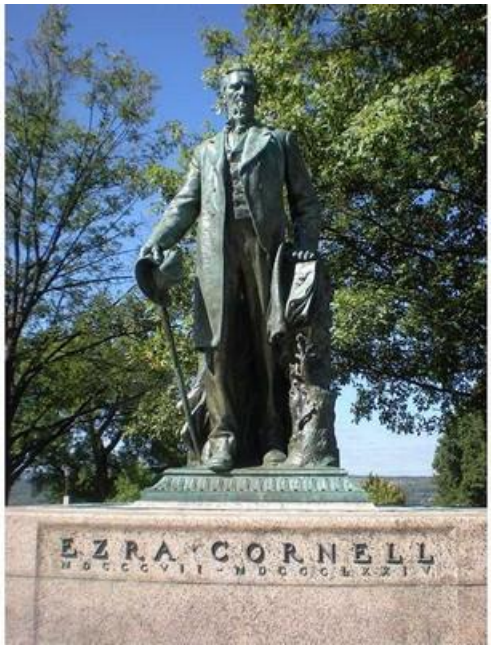
nos vemos obligados a concluir que 1 debe ser igual a 0,9999…[18].
En aquel momento afirmé que no podían ser iguales. No importa cuántos nueves escribiera, yo podría escribir el mismo número de ceros en 1,000… y más adelante, si restáramos su número del mío, quedaría una pequeña cantidad sobrante, algo así como 0,000… 01.
Como el padre de Christy y la responsable de atención al cliente de Verizon, no podía aceptar algo que acababan de demostrarme. Lo veía, pero me negaba a creerlo (esto quizá le recuerde a gente que conoce).
Pero la cosa empeora…, o mejora, si lo que le gusta es sentir que sus neuronas echan chispas. Volviendo a la clase de la señorita Stanton, ¿qué hizo que no nos fijáramos en decimales que ni terminan ni se repiten periódicamente? Es fácil sacar alguno de estos nauseabundos decimales. He aquí un ejemplo:

0,12122122212222…

De manera intencional, los bloques de 2 se agrandan progresivamente según nos movemos hacia la derecha. No hay modo de expresar este decimal mediante una fracción. Las fracciones siempre producen decimales que terminan o que al final se repiten de manera periódica —y puede demostrarse—, y, puesto que este decimal no cumple ninguna de estas condiciones, no puede corresponder al cociente de ningún número entero. Por lo tanto, es irracional.
A la vista de lo artificial que resulta este decimal, se podría pensar que la irracionalidad es poco común; todo lo contrario, es muy habitual. En cierto sentido eso puede precisarse: casi todos los decimales son irracionales y sus cifras parecen estadísticamente aleatorias[19].
Una vez aceptados estos sorprendentes hechos, todo se pone patas arriba. Los números enteros y las fracciones, tan amados y familiares, ahora se muestran escasos y exóticos. ¿Y esa inofensiva fila de números clavada en el corcho de tu clase de primaria? Nadie te lo dijo, pero ahí arriba está el caos.

§6. Ubicación, ubicación, ubicación

He pasado cientos de veces frente a la estatua de Ezra Cornell[20] sin siquiera dirigir la mirada a su verdoso aspecto. Pero un día me paré a observarla detenidamente.



Ezra aparece al aire libre y toscamente dignificado con su abrigo largo, su chaleco y sus botas. Su mano derecha se posa sobre un bastón y sostiene un sombrero de ala ancha. El monumento es poco pretencioso y desarmadamente directo, como era él, por otra parte.

Por eso resulta tan discordante que las fechas de Ezra estén inscritas en el pedestal en pomposos números romanos:

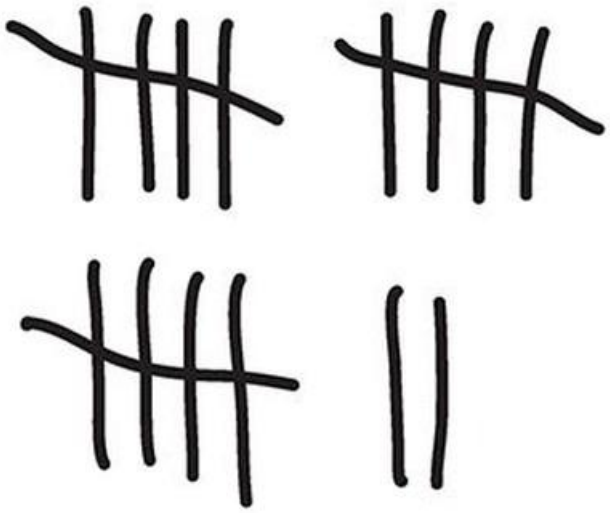
EZRA CORNELL
MDCCCVII - MDCCCLXXIV

¿Por qué no escribir simplemente 1807-1874? Los números romanos pueden resultar impresionantes, pero son difíciles de leer y pesados de utilizar. Ezra hubiera tenido poca paciencia para eso.

Encontrar un buen modo de representar números ha sido siempre un reto. Desde los albores de la civilización, el ser humano ha probado varios sistemas para escribirlos[21] y para calcular con ellos, así fuera para comerciar, medir la tierra o controlar el rebaño.

Lo que comparten casi todos estos sistemas es que nuestra biología está profundamente incrustada en ellos. Tras los caprichos evolutivos, resulta que tenemos cinco dedos en cada una de nuestras dos manos. Este peculiar dato

anatómico se refleja en el sistema primitivo de recuento; por ejemplo, el número 17 se escribe:



Aquí, cada uno de los trazos verticales de cada grupo originariamente debió simbolizar un dedo. ¿Quizá el trazo diagonal fuera un pulgar, doblado sobre el resto de los dedos formando un puño?

Los números romanos[22] son poco más sofisticados que estos recuentos. Puede percibirse la huella del recuento primitivo en el modo en que los romanos escriben el 2 y el 3: II y III. Asimismo, la barra diagonal tiene su eco en la forma del símbolo romano empleado para el 5, V. Pero el 4 es un caso ambiguo. En ocasiones se escribe como IIII, al estilo primitivo (esto se ve a menudo en relojes de lujo), aunque normalmente se escribe como IV. Colocar el número pequeño (I) a la izquierda del número mayor (V) indica que se debe restar I, en lugar de añadirlo, que es lo que se haría en el caso de estar a la derecha. Por lo tanto, IV significa 4, mientras que VI significa 6.

Los babilonios[23] no estaban tan apegados a sus dedos. Su sistema numérico se basaba en el 60, señal evidente de su impecable gusto, pues el 60 es un número excepcionalmente agradable. Su belleza es intrínseca y nada tiene que ver con apéndices humanos[24]. Sesenta es el número más pequeño que puede dividirse entre 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Y eso es solo el principio (también están el 10, 12, 15, 20 y 30). Debido a su promiscua divisibilidad, el 60 es mucho más adecuado que el 10 para cualquier tipo de cálculo o medida que implique cortar en partes iguales. Cuando dividimos una hora en 60 minutos, o un minuto en 60 segundos, o un círculo

completo en 360 grados, estamos canalizando la sabiduría de la vieja Babilonia. Pero el mayor legado de los babilonios es una idea que hoy resulta tan trivial que pocos apreciamos lo sutil e ingeniosa que es.

Para ilustrarla, consideremos nuestro propio sistema hindú-arábico, que incorpora la misma idea en su forma moderna. En lugar de en el 60, este sistema se basa en diez símbolos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0 (el más brillante de todos). Se les llama dígitos, debido naturalmente a la palabra latina que significa «dedo».

La gran innovación es que, a pesar de que el sistema se base en el número 10, no hay un símbolo concreto reservado para 10. El 10 lo marca una *posición* —el lugar del diez— en vez de un símbolo. Lo mismo sucede con 100 o 100 o cualquier otra potencia de 10. Su distinguido estatus no lo marca un símbolo, sino un punto de estacionamiento, un pedazo de propiedad inmobiliaria: ubicación, ubicación, ubicación.

Compare la elegancia de este sistema de valor posicional con la tosca aproximación empleada por los números romanos. ¿Quiere 10? Tenemos 10. Es X. También tenemos 100 (C) y 100 (M), y podemos incluir símbolos especiales para la familia del 5: V, L y D para representar 5, 50 y 500.

La propuesta romana era elevar unos cuantos números predilectos, darles sus propios símbolos y expresar todos los demás (números de segunda categoría) mediante combinaciones de estos.

Desgraciadamente, los números romanos chirriaban al enfrentarse a algo superior a unos pocos miles. En una solución esquiva, que hoy llamaríamos chapuza, los académicos que empleaban aún los números romanos durante la Edad Media recurrieron a amontonar barras encima de los números existentes para indicar la multiplicación por mil. Por ejemplo, $\bar{X}$ significaba diez mil, y $\bar{M}$ significaba mil miles, o sea, un millón. Multiplicar por mil millones rara vez era necesario, pero si hubiera que hacerlo, siempre podría ponerse una segunda barra sobre $\bar{M}$. Como puede ver, la diversión no acababa nunca.

Pero en el sistema hindú-arábico, la representación de cualquier número es inmediata, independientemente de su tamaño. Todos los números pueden expresarse con los mismos diez dígitos, simplemente colocándolos en el lugar correcto. Además, la notación es inherentemente concisa. Por ejemplo, todo número inferior a un millón puede expresarse en seis símbolos o menos. Trate de hacer lo mismo con palabras, barras o números romanos.

Lo mejor de todo es que con un sistema de valor posicional, la gente corriente puede aprender aritmética. Simplemente es necesario dominar algunos datos: las tablas de multiplicar y su equivalente en la suma. Con eso, no necesitará nada más. Cualquier cálculo que implique cualquier pareja de números, del tamaño que sean, puede hacerse empleando los mismos datos una y otra vez de manera recursiva.

Si suena todo muy mecánico, es porque ese es precisamente el objetivo. Con los sistemas de valor posicional, puede programar una máquina para hacer aritmética. Desde los días de las calculadoras mecánicas a los superordenadores de hoy, la automatización de la aritmética ha sido posible gracias a la preciosa idea de valor posicional.

Pero el héroe no reconocido en esta historia es el 0. Sin el 0, toda la propuesta colapsaría. Es el referente que nos permite distinguir entre 1, 10 y 100.

Todos los sistemas de valor posicional están basados en un número, conocido apropiadamente como «la base». La base de nuestro sistema es 10 o decimal (de la raíz latina *decem*, que significa «diez»). Tras el 1, los lugares consecutivos representan decenas, centenas, millares, etcétera, todas ellas potencias del 10.

$$10 = 10^1$$
$$100 = 10 \times 10 = 10^2$$
$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$

En base a lo comentado antes acerca de lo biológico en contraposición a lo lógico, es natural preguntarse: ¿sería otra base más eficiente o más sencilla de manipular?

Se puede defender seriamente una base 2, el famoso y ahora ubicuo sistema empleado en ordenadores y todo lo digital, como teléfonos móviles y cámaras. De todas las bases posibles, exige la menor cantidad de símbolos, solo dos: 0 y 1. Así, engrana perfectamente con la lógica de los interruptores eléctricos o cualquier elemento que pueda alternar entre dos estados: encendido o apagado, abierto o cerrado.

El sistema binario exige costumbre. En lugar de potencias de 10, emplea potencias de 2. Como el sistema decimal, aún conserva un puesto para el 1, pero los puestos subsiguientes ahora los representan doses, cuatros y ochos, puesto que

$$2 = 2^1$$
$$4 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

No escribiríamos el símbolo 2 porque no existe en el sistema binario, de la misma manera que no existe un número independiente para el 10 en el sistema decimal. En binario, el 2 se escribe como el 10, es decir un 2 y cero 1. Igualmente, 4 se escribiría como 100 (un 4, cero 2, y cero 1), y 8 sería 100.

Las implicaciones trascienden a la matemática. Nuestro mundo ha cambiado por la potencia del 2. En las últimas décadas, hemos descubierto que *toda* la información —no solo los números, también el lenguaje, las imágenes y el sonido— puede codificarse en corrientes de ceros y unos.

Lo que nos devuelve a Ezra Cornell.

Resguardado en la parte trasera del monumento, casi oculto del todo, encontramos un telégrafo, un modesto recordatorio de su papel en la creación de Western Union y en la comunicación del continente norteamericano.

Mark H. Anbinder

Como carpintero convertido en empresario, Cornell trabajaba para Samuel Morse, cuyo nombre vive en el código de puntos y rayas a través del que el idioma inglés se redujo a los clics de una tecla de telégrafo. Aquellos dos pequeños símbolos eran precursores tecnológicos de los unos y ceros de hoy.

Morse encomendó a Cornell la construcción de la primera línea de telégrafo del país, un nexo de Baltimore a Washington, D. C., capital de Estados Unidos. Desde el principio, parecía intuir lo que sus puntos y rayas traerían. Cuando la línea se inauguró oficialmente, el 24 de mayo de 1844, Morse envió el primer mensaje: «Lo que Dios ha creado».

Segunda Parte
Relaciones

Contenido:

§7. El placer de la X
§8. Encontrando sus raíces
§9. Mi bañera a rebosar
§10. Machacando las ecuaciones
§11. Herramientas potentes

§7. El placer de la «X»

Ahora es el momento de dejar la aritmética de primaria y pasar a las matemáticas de secundaria y bachillerato. A lo largo de los siguientes diez capítulos revisitaremos el álgebra, la geometría y la trigonometría. No tema haberse olvidado de las tres, esta vez no habrá exámenes. En lugar de preocuparnos de los detalles de estas asignaturas, tenemos el lujo de concentrarnos en sus ideas más bellas, importantes y de mayor alcance.

El álgebra, por ejemplo, quizá le resultó una mareante mezcla de símbolos, definiciones y procedimientos, pero al final todos se reducen a dos actividades: desvelar la x y trabajar con fórmulas.

Desvelar la x es un trabajo detectivesco. Usted busca un número desconocido, x. Se le han entregado unas cuantas pruebas, bien en forma de ecuación: $2x + 3 = 7$, o, lo que es más incómodo, en una enrevesada descripción verbal (como sucede en esos temibles problemas). En cualquier caso, el objetivo es identificar la x a través de la información dada.

Por el contrario, trabajar con fórmulas es una mezcla de arte y ciencia. En lugar de enfrentarse a una x en particular, se manipulan y toquetean relaciones que se mantienen aunque los números que las componen cambien. Estos números cambiantes se llaman variables, y son lo que realmente distingue el álgebra de la aritmética. Las fórmulas en cuestión pueden expresar patrones elegantes acerca de los números por sí mismos —aquí es donde se encuentran el álgebra y el arte—, o bien pueden expresar relaciones entre números en el mundo real, como hacen en las leyes de la naturaleza para objetos que caen, órbitas planetarias o frecuencias genéticas en una población. Aquí es donde el álgebra se encuentra con la ciencia.

La división del álgebra en dos grandes actividades no es estándar (de hecho, me lo acabo de inventar), pero parece que funciona muy bien. En el próximo capítulo, tendré más que decir acerca de desvelar la *x*, así que centrémonos en las fórmulas comenzando con algunos ejemplos sencillos para clarificar ideas.

Hace unos años, mi hija Jo se dio cuenta de algo en relación con Leah, su hermana mayor[25]. Dijo: «Papá, siempre hay un número entre mi edad y la de Leah. Ahora tengo seis años y Leah ocho, y el siete está en medio. Pero, incluso cuando seamos mayores, cuando yo tenga veinte y ella veintidós, todavía habrá un número entre medias».

La observación de Jo puede calificarse de algebraica (aunque nadie, salvo su orgulloso padre, lo vería así) porque se percataba de una relación entre dos variables cambiantes: su edad, x, y la edad de Leah, y. Independientemente de qué edad tenga cada una, Leah siempre será dos años mayor: $y = x + 2$.

El álgebra es el lenguaje en que dichos patrones se expresan más fácilmente. Es difícil dominar el lenguaje del álgebra, porque está lleno de lo que los franceses llaman *faux amis*, «falsos amigos»: una pareja de palabras, cada una de una lengua distinta (en este caso, castellano y álgebra), que suenan emparentadas y parecen significar lo mismo, pero, de hecho, significan algo totalmente distinto.

Por ejemplo, supongamos que la longitud de un pasillo es y cuando se mide en yardas y p cuando se mide en pies. Escriba una ecuación que relacione y con p.

Mi amigo Grant Wiggins, un consultor del sector educativo, ha planteado este problema a alumnos y profesores durante años. Afirma que, según su experiencia, los alumnos yerran más de la mitad de las veces, aunque hayan cursado y aprobado recientemente un curso de álgebra.

Si piensa que la respuesta es $y = 3p$, bienvenido al club.

Parece una traducción directa de la frase «una yarda es igual a tres pies». Pero en cuanto pruebe algunos números, verá que esta fórmula lo hace todo al revés. Digamos que el pasillo mide 10 yardas; todo el mundo sabe que eso son 30 pies. Pero cuando insertamos $y = 10$ y $p = 30$, ¡la fórmula no funciona!

La fórmula correcta es $p = 3y$. Aquí, 3 significa «3 pies por yarda». Cuando se multiplica por y en yardas, las unidades de yardas se anulan y quedan las unidades de pies, como debe ser.

Comprobar que las unidades se anulan correctamente ayuda a evitar este tipo de meteduras de pata. Por ejemplo, la empleada de atención al cliente de Verizon (a la

que nos referimos en el capítulo 5) se hubiera ahorrado confundir dólares y céntimos.

Existe otro tipo de fórmula que se conoce como una «identidad». Cuando usted factorizaba o multiplicaba polinomios en clase de álgebra, estaba manejando identidades. Puede utilizarlas ahora para impresionar a sus amigos con trucos numéricos de salón. Este impresionó al físico Richard Feynman, no precisamente manco en el cálculo mental:

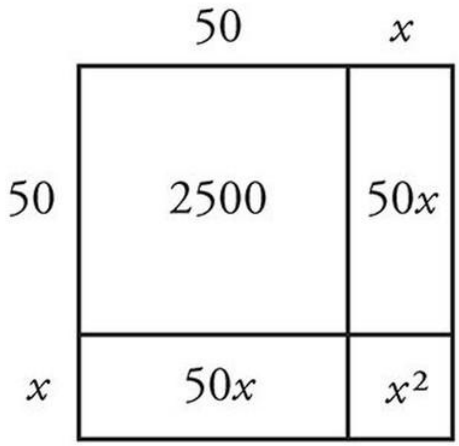
> *Estando en Los Álamos descubrí que Hans Bethe era excelente en cálculo. Por ejemplo, un día estábamos colocando números en una fórmula y llegamos hasta 48 al cuadrado. Según echaba yo mano de la calculadora, me dijo: «2300». Empecé a pulsar los botones y añadió: «Si lo quieres exacto, son 2304».*
>
> *La calculadora marcaba 2304. «¡Vaya! ¡Es impresionante!», dije yo.*
>
> *«¿No sabes cómo elevar al cuadrado números cercanos a 50?», dijo. «Elevas 50 al cuadrado —o sea, 2500— y restas 100 veces la diferencia de tu número respecto al 50 (en este caso, 2), por lo tanto: 2300. Si quieres la máxima corrección, eleva la diferencia al cuadrado y súmala, eso equivale a 2304»*[26].

El truco de Bethe se basa en la identidad:

$$(50 + x)^2 = 2500 + 100x + x^2$$

Había memorizado la ecuación y la estaba aplicando al caso en que x es -2, que corresponde al número $48 = 50 - 2$.

Para obtener una demostración intuitiva de esta fórmula, imagine una porción cuadrada de una alfombra donde cada lado mide $50 + x$.



Luego su área es (50 + *x*) al cuadrado, que es lo que estamos buscando. Pero el diagrama muestra que esta área se compone de un cuadrado de 50 por 50 (esto aporta el 2500 a la fórmula), dos rectángulos de dimensiones 50 por *x* (cada uno aporta un área de 50*x*, por un total de 100*x*), y, finalmente, el pequeño cuadrado *x* por *x* da un área de *x* al cuadrado, el último término en la fórmula de Bethe.

Relaciones como estas no son solo para físicos teóricos. Una identidad similar a la de Bethe es relevante para cualquiera que tenga dinero invertido en bolsa[27]. Imagine que su cartera cae catastróficamente un 50 por ciento un año y recobra un 50 por ciento el siguiente. Incluso después de esa brusca recuperación, estaría perdiendo un 25 por ciento. Para ver por qué, observe que una pérdida del 50 por ciento multiplica su dinero por 0,50, y una ganancia del 50 por ciento lo multiplica por 1,50, lo que equivale a 0,75 —en otras palabras, pérdidas del 25 por ciento—.

De hecho, *nunca* se vuelve al importe inicial cuando se pierde y se gana el mismo porcentaje en años consecutivos. Gracias al álgebra entendemos por qué. Se deduce de la identidad:

$$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$$

En el año de caída, la cartera encoge por un factor de $1 - x$ (siendo $x = 0{,}50$ en el ejemplo), y un año más tarde crece por un factor de $1 + x$. De esta manera, el cambio neto es factor de:

$$(1 - x)(1 + x)$$

Y de acuerdo con la fórmula dada, esto es igual a:

$$1 - x^2$$

La idea es que esta expresión es *siempre* menos que 1 para cualquier x que no sea 0. Así que nunca recupera del todo sus pérdidas.

No hace falta decir que no todas las relaciones entre variables son tan claras y concisas como las mostradas. Aun así, el aura del álgebra es seductora, y en manos crédulas genera estupideces tan asombrosas como la fórmula de la diferencia de edad socialmente aceptable en una relación amorosa[28]. Según algunas páginas web, si su edad es x, la sociedad desaprobará que salga con alguien menor que $x/2 + 7$.

En otras palabras, sería espeluznante que alguien de más de ochenta y dos años se fijara en mi mujer, de cuarenta y ocho, aunque estuviera disponible. ¿Alguien de ochenta y uno? Sin problema.

¡Argh!

§8. Encontrando sus raíces

Durante más de 2500 años, los matemáticos han tenido obsesión por desvelar la x. La historia de sus dificultades para encontrar las raíces[29] —las soluciones— de ecuaciones cada vez más complicadas es una de las grandes epopeyas de la historia del pensamiento humano.

Uno de los casos más antiguos dejó perplejos a los ciudadanos de Delos, allá por el año 430 a. C. Desesperados por combatir una plaga, consultaron al oráculo de Delfos, que les aconsejó que doblaran el volumen del altar de Apolo, que tenía, por cierto, forma de cubo. Desgraciadamente, resultó que doblar el volumen de un cubo[30] les exigía construir la raíz cúbica de 2, una misión que ahora se sabe imposible, dada su restricción de utilizar nada más que una regla y un compás, las únicas herramientas de la geometría griega.

Estudios posteriores de problemas similares han revelado otro detallito, irritante y persistente, que no desaparece: aun cuando las soluciones eran posibles, solían implicar raíces cuadradas de números negativos[31]. Estas soluciones fueron ridiculizadas, tachadas de sofistas y ficticias, porque aparentemente carecían de sentido.

Hasta el siglo XVIII, aproximadamente, los matemáticos creían que las raíces cuadradas de números negativos, simplemente, no podían existir.

Al final, no podían ser números positivos, dado que positivo por positivo es siempre positivo y buscamos números cuya raíz cuadrada sea negativa. Tampoco podían servir los números negativos, ya que negativo por negativo es, de nuevo, *positivo*. No había esperanza de encontrar números que, multiplicados por sí mismos, dieran respuestas negativas.

Ya hemos visto crisis de este estilo. Suceden cuando una operación ya existente se lleva demasiado lejos, hasta esferas en las que ya no parece razonable. Al igual que restar a números pequeños números mayores dio origen a los números negativos (capítulo 3) y que la división creó los decimales y las fracciones (capítulo 5), el uso libertario de las raíces cuadradas finalmente forzó la expansión del universo de los números… de nuevo.

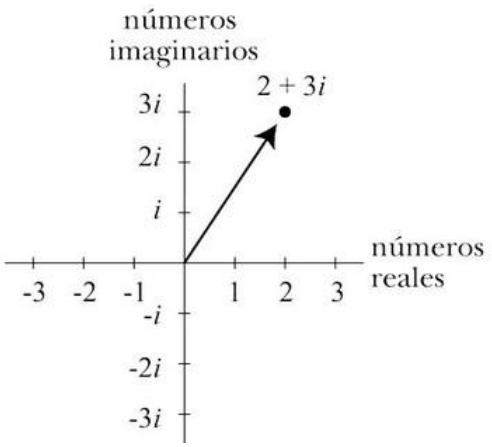
En términos históricos, este fue el paso más doloroso de todos. La raíz cuadrada de −1 todavía se conoce con el degradante término *i*, de «imaginario».

Esta nueva clase de número (o, si prefiere ser agnóstico, llámelo símbolo, en lugar de número) se define por la siguiente propiedad:

$$i^2 = -1$$

Es cierto que *i* puede encontrarse en cualquier lugar de la fila numérica. En ese sentido, es mucho más extraño que el cero, los números negativos, las fracciones e incluso que los números irracionales, pues todos ellos —a pesar de ser tan extraños— ocupan un lugar concreto en la fila.

Pero con la suficiente imaginación, nuestras mentes también pueden hacer hueco a *i*. Vive fuera de la línea numérica, en ángulos rectos respecto a ella, en su propio eje imaginario. Y cuando se fusionan el eje imaginario y la línea de los números «reales» ordinarios, se crea un espacio bidimensional —un plano— donde vive esta nueva especie de números.

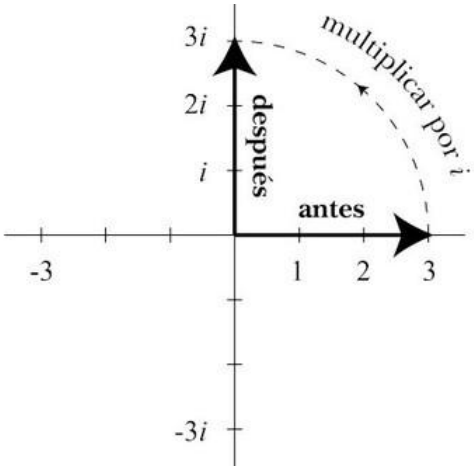


Estos son los números complejos. Aquí, «complejo» no significa «complicado», significa que se han unido dos tipos de números, reales e imaginarios, para formar un número complejo, híbrido, como 2 + 3*i*.

Los números complejos son magníficos, el pináculo de los sistemas numéricos. Disfrutan de las mismas propiedades que los números reales —se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir—, pero son *mejores* que estos porque siempre tienen raíces. Se puede tomar la raíz cuadrada o cúbica de un número complejo y el resultado seguiría siendo un número complejo.

Mejor aún, un gran informe llamado el teorema fundamental del álgebra afirma que las raíces de cualquier polinomio son siempre números complejos. En ese sentido, son el final de la cruzada, el Santo Grial. El universo de los números no necesita volver a expandirse. Los números complejos son la culminación del viaje que comenzó con 1.

Se puede apreciar la utilidad de los números complejos (o hallarla más plausible) sabiendo cómo visualizarlos. La clave está en entender cómo se multiplica por *i*. Imaginemos que multiplicamos por *i* un número positivo cualquiera, el 3, por ejemplo. El resultado es el número imaginario 3*i*.

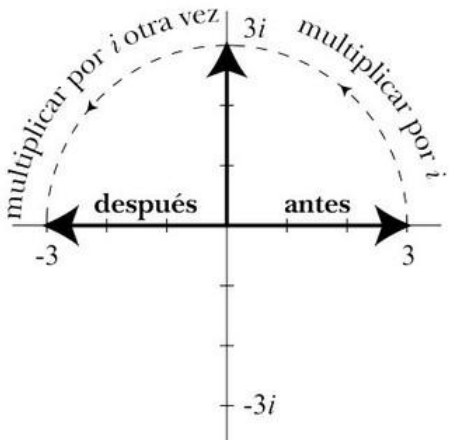


Por lo tanto, multiplicar por *i* genera una rotación de un cuarto en sentido opuesto a las agujas del reloj. Toma una flecha de longitud 3 que apunta al este y la convierte en una nueva flecha, de igual longitud, pero que ahora apunta hacia el norte.

Los ingenieros eléctricos adoran los números complejos por esta razón. Tener una manera tan compacta de representar una rotación de 90 grados es muy útil cuando se trabaja con corrientes y voltajes alternos, o con campos electromagnéticos, porque todos ellos suelen implicar oscilaciones o curvas que están desfasadas un cuarto de ciclo (es decir, 90 grados).

De hecho, los números complejos son indispensables para todos los ingenieros. En ingeniería aeronáutica, facilitaron los primeros cálculos de la elevación del ala de un avión. Los ingenieros civiles y mecánicos los utilizan rutinariamente para analizar las vibraciones de pasarelas, rascacielos y coches que circulan por carreteras con baches.

La propiedad de rotación de 90 grados esclarece el significado de $i^2 = -1$. Si multiplicamos un número positivo por i^2, la flecha correspondiente rota 180 grados, pasando de este a oeste, porque las dos rotaciones de 90 grados (una por cada factor de *i*) se combinan para dar una rotación de 180 grados.



Pero multiplicar por −1 provoca el mismo giro de 180 grados. Ese es el sentido en que $i^2 = -1$.

Los ordenadores han dado vida a los números complejos y al viejo problema de hallar raíces. Cuando no se usan para navegar por Internet o enviar e-mails, las máquinas que tenemos sobre la mesa son capaces de revelar cosas que los antiguos nunca soñaron.

En 1976, John Hubbard, compañero de la Universidad de Cornell, comenzó a observar la dinámica del método de Newton[32], un algoritmo potente para encontrar raíces de ecuaciones en el plano complejo. El método exige un punto de partida (una aproximación a la raíz) y realiza una computación que la mejora. Haciendo esto repetidas veces, siempre empleando el punto previo para generar uno mejor, el método tira hacia delante y se dirige a una raíz.

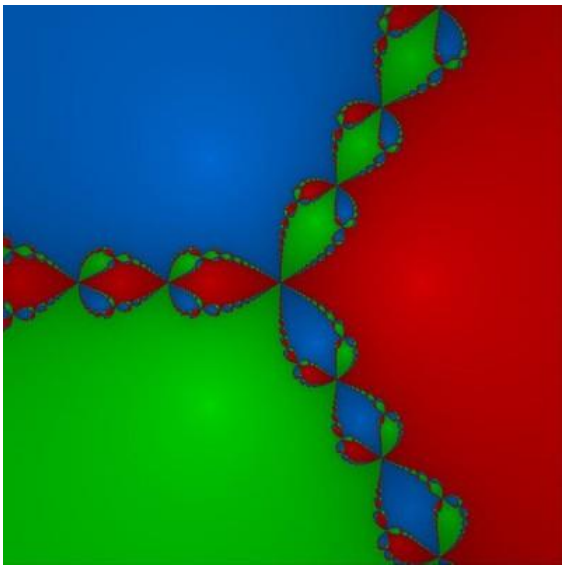
A Hubbard le interesaban los problemas con *múltiples* raíces. En ese caso, ¿qué raíz encontraría el método? Demostró que si solo existían dos raíces, la más cercana siempre ganaría. Sin embargo, si había tres o más raíces, se desconcertaba; su demostración no funcionaba.

Así que Hubbard hizo un experimento, un experimento *numérico*.

Programó un ordenador para que realizara el método de Newton. Luego aplicó códigos de color a millones de puntos de partida distintos, en función de a qué raíz se aproximaban y para oscurecerlos de acuerdo con el tiempo que tardaran en llegar.

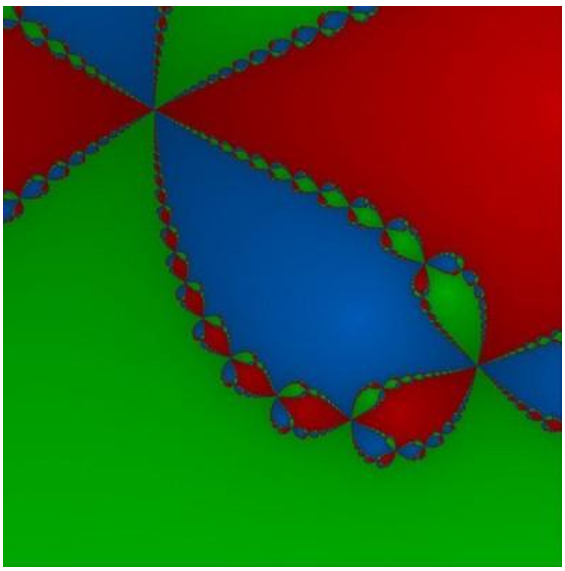
Antes de ver los resultados, anticipó que las raíces atraerían más rápido a los puntos cercanos y, por lo tanto, deberían aparecer como puntos brillantes en una mancha sólida de color. Pero ¿qué hay de las fronteras entre parches, aquellas que no podía imaginarse, al menos no en su mente?

La respuesta del ordenador fue sorprendente.



Simon Tatham

Las tierras fronterizas parecían alucinaciones psicodélicas[33]. Los colores se entremezclaban con una promiscuidad casi imposible, tocándose entre sí en infinitos puntos y siempre de tres en tres. En otras palabras, siempre que se encontraban dos colores, un tercer color se insertaba y se unía a ellos.
Magnificar las fronteras desveló patrones dentro de patrones.



Simon Tatham

La estructura era un fractal[34], una forma intrincada cuya estructura interior se repite a escalas cada vez más sutiles.

Además, el caos reinaba cerca de la frontera. Dos puntos pueden comenzar muy próximos, rebotar de lado a lado durante un rato y luego desviarse a diferentes raíces. La raíz ganadora era tan imprevisible como el número ganador en la ruleta. Pequeñas cosas —cambios diminutos e imperceptibles en las condiciones iniciales— podrían marcar la diferencia.

El trabajo de Hubbard fue una incursión temprana en lo que ahora se llama dinámica compleja, una fusión vibrante entre la teoría del caos, el análisis complejo y la geometría fractal. En cierto modo, devolvió a la geometría a sus raíces. En el 600 a. C. un manual escrito en sánscrito para constructores de templos en la India daba instrucciones geométricas detalladas para calcular raíces cuadradas (necesarias para la construcción de altares ceremoniales)[35]. Más de 2500 años después, en 1976, los matemáticos seguían buscando raíces, pero ahora las instrucciones se escribían en código binario.

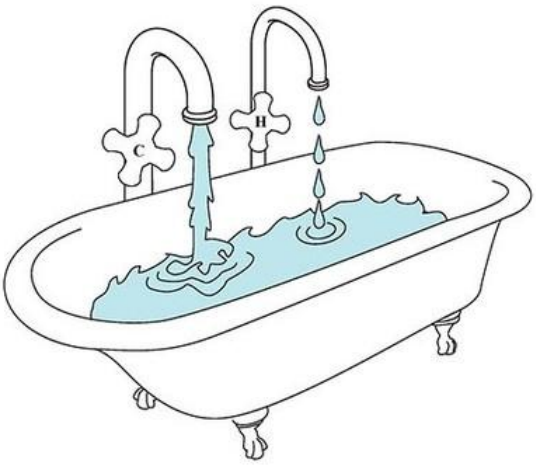
Amigos imaginarios para los que nunca te haces mayor.

§9. Mi bañera a rebosar

El tío Irv era el hermano de mi padre y también su socio en una zapatería que tenían en nuestra ciudad. Él se encargaba de los temas económicos y solía estar en la oficina del piso de arriba, porque se le daban bien los números, pero no tanto los clientes.

Cuando yo tenía diez u once años, el tío Irv me planteó mi primer problema matemático[36]. Todavía me acuerdo de él, probablemente porque no lo acerté y me dio vergüenza.

Tenía que ver con llenar una bañera[37]. Si el grifo de agua fría puede llenar la bañera en media hora y el de agua caliente en una hora, ¿cuánto tardará en llenarse la bañera si ambos están abiertos?



Estoy bastante seguro de haber dicho cuarenta y cinco minutos, como hubiera hecho mucha gente. El tío Irv negó con la cabeza y sonrió. Después, con su voz aguda y nasal, procedió a enseñarme.

«Steven», me dijo, «averigua cuánta agua se vierte en la bañera en un minuto». El agua fría llena la bañera en treinta minutos, luego en un minuto llena 1/30 de la bañera. Pero el agua caliente es más lenta, tarda sesenta minutos, lo que significa que llena solo 1/60 de la bañera por minuto. Cuando ambos están en marcha llenan

$$1/30 + 1/60$$

de la bañera por minuto.

Para sumar estas fracciones, obsérvese que 60 es el mínimo común denominador. Por lo tanto, reescribiendo 1/30 como 2/60, obtenemos

$$1/30 + 1/60 = 2/60 + 1/60 =$$

$$= 3/60 =$$

$$= 1/20$$

Lo que significa que los dos grifos funcionando a la vez llenan 1/20 de la bañera por minuto. Así que llenan la bañera entera en veinte minutos.

Desde entonces, a lo largo de los años, he pensado mucho en este dilema de la bañera, siempre con afecto hacia el tío Irv y hacia el problema mismo, en el que

hay implícitas lecciones más amplias, lecciones sobre cómo resolver problemas de manera aproximada cuando no pueden resolverse con exactitud, y cómo resolverlos intuitivamente, por el placer del momento «¡Ajá!».

Considere mi suposición inicial: cuarenta y cinco minutos. Observando un caso extremo o limitante, vemos que esa respuesta no puede ser correcta. De hecho, es absurda. Para entender por qué, supongamos que el agua caliente estaba cerrada. En ese caso, el agua fría —por su cuenta— llenaría la bañera en treinta minutos. Así que, sea cual sea la respuesta a la pregunta del tío Irv, sabemos que tiene que ser menor a esa cifra. Después de todo, abrir el grifo del agua caliente a la vez que el del agua fría solo puede ayudar.

Es cierto que esta conclusión no es tan informativa como la respuesta exacta de veinte minutos que hallamos a través del método del tío Irv, pero tiene la ventaja de no exigir cálculo alguno.

Otra manera de simplificar el problema es pretender que los dos grifos corren al mismo ritmo. Pongamos que cada uno puede llenar la bañera en treinta minutos (suponiendo que el agua caliente es tan rápida como la fría). En ese caso la respuesta sería evidente. Debido a la simetría de la situación, los dos grifos, perfectamente sincronizados, llenarían la bañera en quince minutos, puesto que cada uno se ocupa de la mitad de la tarea.

Esto nos dice, de manera instantánea, que la situación que plantea el tío Irv conlleva —necesariamente— más de quince minutos. ¿Por qué? Porque «rápido más rápido» vence a «lento más rápido». Nuestra situación imaginariamente simétrica tenía dos grifos igualmente rápidos, mientras que la de Irv tiene uno rápido y otro lento. Y puesto que quince minutos es la respuesta cuando ambos son rápidos, la bañera del tío Irv solo puede ser más lenta.

Lo que resulta de todo esto es que, considerando dos casos hipotéticos —uno con el agua caliente apagada y otro con grifos igualmente rápidos—, hemos concluido que la respuesta está en algún punto entre quince y treinta minutos. En problemas mucho más complejos, donde puede ser imposible dar con una respuesta exacta —no solo en matemáticas, también en otros campos—, este tipo de información parcial puede ser muy útil.

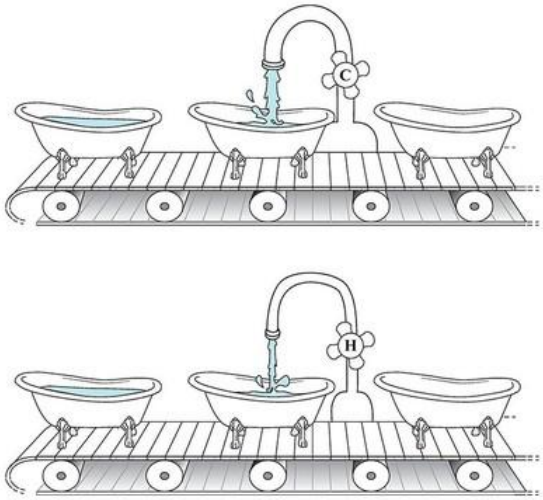
Aun si tenemos la suerte de dar una respuesta exacta, no es motivo de complacencia. Puede haber caminos más sencillos o claros para hallar la solución. Este es un punto en el que las matemáticas permiten creatividad.

Por ejemplo, en lugar de recurrir al método de manual que usa el tío Irv, con sus fracciones y sus denominadores comunes, he aquí una ruta más lúdica que conduce al mismo resultado. Me percaté años más tarde, cuando intenté identificar por qué el problema resulta tan confuso y entendí que es por las distintas velocidades de los grifos. Provoca dolor de cabeza registrar qué aporta cada grifo, especialmente si imaginamos las aguas caliente y fría chapoteando y mezclándose en la bañera.

Así que mantengamos las aguas separadas, por lo menos mentalmente. En lugar de una bañera única, imagine dos líneas de montaje con varias bañeras cada una y las dos cintas transportadoras llevando a unas al grifo de agua caliente y a otras al de agua fría.

Cada grifo está en su sitio y llena sus propias bañeras, mezclar no está permitido. En cuanto una bañera se llena, sigue adelante, dejando pasar a la siguiente.

Ahora todo parece más fácil. En una hora, el grifo del agua caliente llena una bañera, mientras que el de agua fría llena dos (puesto que para cada una tarda media hora). Eso suma tres bañeras por hora, o bien una cada veinte minutos. ¡Eureka!



Pero entonces, ¿por qué tanta gente —incluido yo mismo de joven— mete la pata y dice cuarenta y cinco minutos? ¿Por qué resulta tan tentador repartir la diferencia entre treinta y sesenta minutos? No estoy seguro, pero parece un caso de reconocimiento defectuoso de patrones. Quizá el problema de la bañera se está confundiendo con otros en los que el reparto de la diferencia tiene sentido. Mi mujer me lo explicó por analogía. Imagine que está ayudando a una ancianita a

cruzar la calle. Sin su ayuda, la mujer tardaría sesenta segundos, mientras que usted tardaría treinta segundos. Entonces, ¿cuánto tardarían ustedes dos, agarrados del brazo? Un arreglo de cuarenta y cinco segundos parece razonable; ella, al agarrase de su brazo, le ralentiza, pero usted la acelera.

En este caso, la diferencia está en que uno afecta a la velocidad del otro, cosa que no sucede en el caso de los grifos. Son independientes. Parece que nuestro subconsciente no repara en esta diferencia, por lo menos no cuando se aventura a una conclusión equivocada.

El consuelo es que incluso las respuestas erróneas pueden ser educativas… siempre y cuando se percate de que son erróneas. Exponen analogías desencaminadas y demás imprecisiones conceptuales, y ponen de relieve el quid de la cuestión con mayor agudeza.

Otros problemas clásicos están ideados para confundir, deliberadamente, a sus víctimas, desorientándolas, como el juego de manos de un ilusionista. La verbalización de la pregunta tiende una trampa. Si responde instintivamente, caerá en ella.

Pruebe con este. Suponga que tres hombres pueden pintar tres vallas en tres horas. ¿Cuánto tardaría un solo hombre en pintar una valla?

Es tentador decir «una hora». Las propias palabras empujan a ello. La cadencia de la primera frase —tres hombres, tres vallas, tres horas— llama la atención y establece un ritmo, así que cuando la siguiente frase repite el patrón con un hombre, una valla, _____ horas, es difícil resistirse a llenar el hueco con «una». La construcción en paralelo sugiere una respuesta lingüísticamente correcta, pero matemáticamente errónea.

La respuesta correcta es tres horas.

Si *visualiza* el problema —imagine a tres hombres pintando tres vallas y terminando en tres horas, como dice el enunciado—, la respuesta correcta es evidente. Para que todas las vallas estén terminadas pasadas tres horas, cada hombre debe haber invertido tres horas en la suya.

El razonamiento sin distracciones que este problema exige es una de las cosas más valiosas de los problemas matemáticos. Nos fuerza a detenernos y pensar, normalmente de maneras poco habituales. Nos obliga a practicar la atención.

Pero quizá sea más importante el hecho de que con los problemas matemáticos no se practica solo el pensar en números, sino el pensar en *relaciones* entre números —cómo las corrientes de los grifos afectan al tiempo que requiere llenar la bañera, por ejemplo—. Y ese es el siguiente paso esencial en la educación matemática de cualquiera. Es comprensible que muchos tengamos problemas con ello: las relaciones son mucho más abstractas que los números. Pero también son más poderosas. Expresan la lógica interna del mundo que nos rodea. Causa y efecto, oferta y demanda, entrada y salida, dosis y respuesta…, todas estas relaciones implican parejas de números y la relación entre ellos. Los problemas matemáticos nos inician en esta manera de pensar.

Sin embargo, Keith Devlin lanza una crítica interesante en su ensayo «El problema de los problemas matemáticos». La cuestión que plantea es que estos problemas normalmente asumen que se entienden las reglas del juego y se acepta regirse por ellas, aunque a menudo sean artificiales, a veces de manera absurda. Por ejemplo, en nuestro problema de tres hombres pintando tres vallas en tres horas, estaba implícito que (1) todos los hombres pintan a la misma velocidad y (2) que todos mantienen el ritmo, sin disminuir o aumentar la velocidad. Ambas asunciones son irreales. Se supone que uno sabe que no debe preocuparse por eso y debe seguir adelante con la broma, porque, de otra manera, el problema sería demasiado complicado y no habría información suficiente para resolverlo. Necesitaría saber cuánto baja el ritmo un pintor a medida que se cansa, con qué frecuencia se detiene cada uno para comer algo, etcétera.

Quienes enseñamos matemáticas deberíamos convertir esta molestia en una característica. Deberíamos ser claros acerca del hecho de que los problemas nos fuerzan a hacer supuestos simplificadores. Esta es una virtud valiosa —se llama creación de modelos matemáticos—. Los científicos lo hacen constantemente cuando aplican las matemáticas al mundo real. Pero ellos, a diferencia de los autores de la mayor parte de problemas, tienen cuidado al expresar explícitamente sus supuestos.

Así que gracias, tío Irv, por esa primera lección. ¿Humillante? Sí. ¿Inolvidable? También, pero en el buen sentido.

§10. Machacando las ecuaciones

La ecuación de segundo grado (o ecuación cuadrática) es el Rodney Dangerfield del álgebra: aunque es uno de los mejores cómicos de la historia, no hay dios que le respete.

Los profesionales no están enamorados de la fórmula cuadrática, eso seguro. Cuando se pide a matemáticos y físicos que hagan una lista de las diez ecuaciones más bellas o importantes de todos los tiempos, la ecuación de segundo grado nunca supera la criba[38]. Por supuesto, todo el mundo se desmaya con el 1 + 1 = 2, y con $E = mc^2$, y con el impertinente teorema de Pitágoras, pavoneándose por aquello de $a^2 + b^2 = c^2$. ¿Las ecuaciones de segundo grado? Ni hablar.

Hay que admitir que es antiestética. Algunos estudiantes prefieren declamarla, como si fuera un conjuro ritual: «*x* es igual a *b* negativa, más o menos la raíz cuadrada de *b* al cuadrado menos cuatro *a c*, todo sobre 2*a*». Otros, hechos de pasta más dura, miran a la fórmula directamente a los ojos, enfrentándose a la mezcolanza de letras y símbolos más formidable que han visto en su vida.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Solo cuando se entiende qué pretende la fórmula cuadrática puede uno empezar a entender su belleza interna. En este capítulo, espero ofrecerle una muestra de la inteligencia agrupada en ese puercoespín de símbolos, así como una mejor comprensión del significado y origen de la fórmula.

Hay muchas situaciones en que nos gustaría descubrir el valor de algún número desconocido. ¿Qué dosis de radioterapia debe aplicarse para reducir un tumor de tiroides? ¿Cuánto dinero debe pagar anualmente para cubrir una hipoteca, a treinta años, de 200 00 dólares a un interés anual fijo del 5 por ciento? ¿A qué velocidad tiene que ir un cohete para escapar de la gravedad terrestre?

El álgebra es el lugar donde nos curtimos en simples problemas de este tipo. El tema lo desarrollaron matemáticos islámicos allá por el año 800 d. C., apoyándose en trabajos anteriores de académicos egipcios, babilonios, griegos e indios. El

ímpetu pragmático del momento era el reto de calcular herencias en base a la ley islámica[39].

Por ejemplo, supongamos que una viuda muere y deja su patrimonio de 10 dírhams a su hija y a sus dos hijos. La ley islámica exige que ambos hijos deben recibir partes iguales. Es más, cada hijo debe recibir el doble que la hija. ¿Cuántos dírhams recibirá cada uno?

Vamos a utilizar la letra x para denotar la herencia de la hija. Aunque no sepamos a qué equivale la x, podemos razonar con ella como si fuera un número ordinario. Sabemos que cada hijo recibe el doble que la hija, así que cada uno recibe $2x$. Es decir, que el total de lo que reciben es $x + 2x + 2x$, por un total de $5x$, y esto debe ser igual que el valor total del patrimonio, o sea 10 dírhams. Por lo tanto, $5x = 10$ dírhams. Si finalmente dividimos ambos lados de la ecuación por 5, vemos que $x = 2$ dírhams, la parte de la hija. Y puesto que los hijos heredan $2x$ cada uno, ambos reciben 4 dírhams.

Fíjese que han aparecido dos tipos de números, unos conocidos, como 2, 5 y 10, y otros desconocidos, como x. Cuando conseguimos derivar una relación entre lo conocido y lo desconocido (como encapsula la ecuación $5x = 10$), logramos ahondar en la ecuación, dividiendo ambos lados entre 5 para despejar la x. Era como la labor del escultor que trabaja el mármol, que trata de extraer la estatua de la piedra.

Una táctica algo diferente habría sido necesaria si hubiéramos topado con un número conocido que se *resta* a uno desconocido, en una ecuación tipo $x - 2 = 5$. En este caso, para liberar la x, debemos sumar dos a ambos lados de la ecuación. Esto deja una x a la izquierda y $5 + 2 = 7$ a la derecha. Por lo tanto, $x = 7$, lo que ya habrá deducido por sentido común.

Aunque hoy esta táctica resulta familiar a todos los alumnos de álgebra, pueden no ser conscientes de que da nombre a toda una asignatura. A principios del siglo IX, Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi[40], un matemático afincado en Bagdad, escribió un influyente manual que resaltaba la utilidad de restablecer una cantidad restada (como el 2 en el ejemplo anterior) sumándola al otro lado de la ecuación. Llamó a este proceso *al-jabr* («restablecer», «restituir»), que más adelante se transformó en «álgebra». Más adelante, mucho después de su muerte, le tocó de nuevo el premio gordo de la etimología: su propio nombre, al-Jwarizmi, sobrevive en la palabra «algoritmo».

En su libro, antes de zambullirse en las complejidades de calcular herencias, al-Jwarizmi se ocupó de una clase más compleja de ecuaciones que encarnan relaciones entre *tres* tipos de números, no solo dos, como hemos visto en el ejemplo. Junto con números conocidos y desconocidos *(x)*, estas ecuaciones también incluían el número desconocido al cuadrado (x^2). Ahora se llaman ecuaciones de segundo grado (o ecuaciones cuadráticas, del latín *quadratus)*. Los antiguos académicos de Babilonia, Egipto, Grecia, China e India ya habían abordado estos acertijos —que normalmente surgían en problemas arquitectónicos o geométricos que implicaban áreas o proporciones— y habían mostrado cómo resolver algunos de ellos.

Un ejemplo comentado por al-Jwarizmi es:

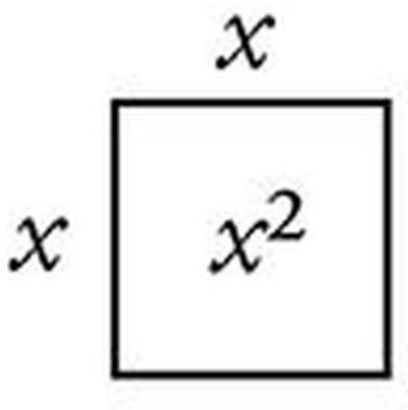
$$x^2 + 10x = 39$$

En su momento, problemas como este se planteaban en palabras, no en símbolos. Al-Jwarizmi se preguntaba: «¿Cuál es el cuadrado que, cuando es incrementado por diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve?». (Aquí, el término «raíz» se refiere a la desconocida x).

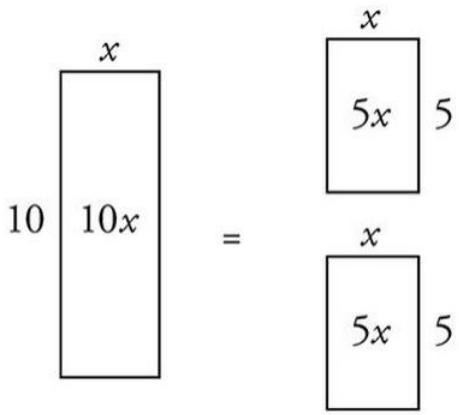
Este problema es mucho más duro que los dos anteriores. ¿Cómo podemos despejar la x ahora? Los trucos empleados antes son insuficientes, porque x^2 y $10x$ se pisan mutuamente. Incluso si conseguimos despejar la x en uno de ellos, el otro sigue siendo problemático. Por ejemplo, si dividimos ambos lados de la ecuación por 10, el $10x$ se simplifica en x, que es lo que queremos, pero entonces el x^2 se convierte en $x^2/10$, lo cual no nos acerca a descubrir la x. El obstáculo principal, en pocas palabras, es que tenemos que hacer dos cosas a la vez que parecen casi incompatibles.

La solución que presenta al-Jwarizmi merece que profundicemos en ella. En primer lugar porque es muy aguda, y en segundo, porque es muy poderosa: nos permite resolver *todas* las ecuaciones de segundo grado de un solo plumazo. Me refiero a que si cambiásemos los números conocidos del ejemplo anterior (10 y 39), el método seguiría funcionando.

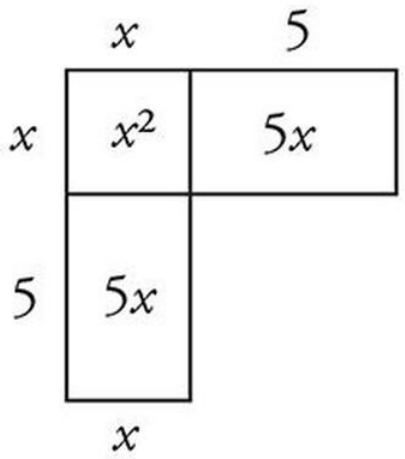
La idea es interpretar cada uno de los términos de la ecuación de manera geométrica. Piense en el primero de ellos, x^2, como el área de un cuadrado con dimensión x por x.



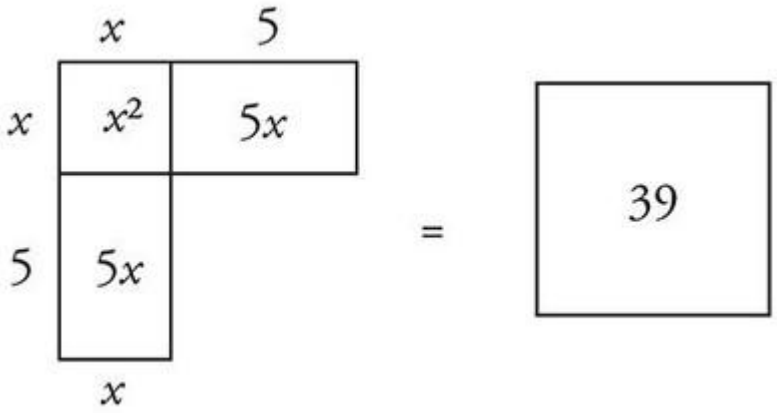
De manera similar, observe el siguiente término, 10*x*, como el área del rectángulo de dimensiones 10 por *x* o, si nos ponemos ingeniosos, como el área de dos rectángulos iguales, con medidas de 5 por *x*. (Dividir el rectángulo en dos sienta la base para la maniobra clave que sigue, conocida como «completando el cuadrado»).



Una los dos nuevos rectángulos al cuadrado para crear una forma mellada del área $x^2 + 10x$:

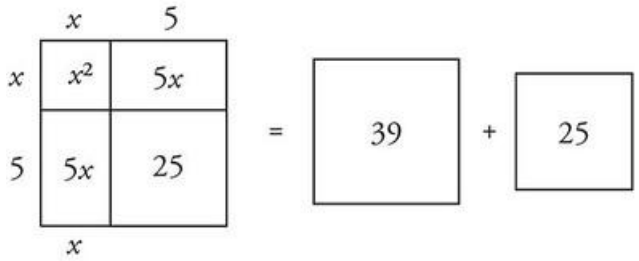


Desde esta perspectiva, el puzle de al-Jwarizmi se resume en preguntar: si la forma mellada ocupa 39 unidades cuadradas del área, ¿qué tamaño debería tener *x?*



$$x^2 + 10x = 39$$

La figura misma sugiere irresistiblemente el siguiente paso. Observe la esquina que falta. Si se rellenara, la forma mellada se convertiría en el cuadrado perfecto. Así que cojamos la indirecta y completemos el cuadrado.



$$(x + 5)^2 = 64$$

Suministrar el cuadrado de 5 × 5 faltante suma 25 unidades cuadradas al área ya existente de $x^2 + 10x$, hasta un total de $x^2 + 10x + 25$. De manera equivalente, esa área combinada puede expresarse más nítidamente como $(x + 5)^2$, ya que cada lado del cuadrado completo mide $x + 5$.

El resultado es que x^2 y $10x$ ahora se mueven con gracia en pareja —en lugar de pisarse mutuamente— dentro de una única expresión: $(x + 5)^2$. Esto es lo que pronto nos permitirá resolver la x.

Mientras tanto, puesto que añadimos 25 unidades de área al lado izquierdo de la ecuación $x^2 + 10x = 39$, debemos también sumar 25 al lado derecho, para mantener la ecuación equilibrada. Dado que 39 + 25 = 64, nuestra ecuación se convierte en:

$$(x + 5)^2 = 64$$

Pero esto es muy sencillo de resolver. Sacar raíces cuadradas de ambos lados resulta en $x + 5 = 8$, por lo tanto, $x = 3$.

Pero hete aquí que el 3 realmente resuelve la ecuación $x^2 + 10x = 39$. Si 3 lo elevamos al cuadrado (obteniendo 9) y luego sumamos 10 veces 3 (obteniendo 30), la suma da 39, como queríamos.

Solo hay un inconveniente. Si al-Jwarizmi estuviera estudiando álgebra hoy, esta respuesta no le daría toda la puntuación. No menciona que un número negativo, $x = -13$, también funciona. Elevarlo al cuadrado da 169; sumarlo diez veces da −130 y la suma de ambos números también es 39. Pero esta solución negativa se ignoró en la antigüedad, ya que un cuadrado con un lado de longitud negativa carece de significado geométrico. Hoy, el álgebra es menos dependiente de la geometría, y las soluciones positivas y negativas se consideran igualmente válidas.

En los siglos posteriores a al-Jwarizmi, los académicos llegaron a la conclusión de que *todas* las ecuaciones de segundo grado podían resolverse de la misma manera, completando el cuadrado, siempre que uno estuviera dispuesto a permitir la entrada a los números negativos (y a sus desconcertantes raíces cuadradas) que solían aparecer en las respuestas. Esta línea argumentativa reveló que las soluciones a cualquier ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(donde *a*, *b* y *c* son números conocidos pero arbitrarios y *x* es desconocido) podían expresarse mediante la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lo más destacable de esta fórmula es lo brutalmente explícita e integral que es. Ahí está la respuesta, justo ahí, independientemente de lo que sean *a*, *b* o *c*. Teniendo en cuenta que existen infinitas posibilidades para cada uno de ellos, es mucho manejo para una sola fórmula.

En nuestros tiempos, la fórmula cuadrática se ha convertido en una herramienta irreemplazable para aplicaciones prácticas. Ingenieros y científicos la utilizan para analizar la sintonización de una radio, el balanceo de una pasarela o un rascacielos, el arco de una bola de béisbol o una bala de cañón, las subidas y bajadas de la población animal e innumerables fenómenos más del mundo real.

Para una fórmula nacida de la matemática de herencia, es todo un legado.

§11. Herramientas potentes

Si usted era un ávido espectador de televisión en la década de 1980, recordará una ingeniosa serie llamada *Luz de luna*. Se hizo popular por sus diálogos ágiles y la química romántica entre sus protagonistas: Cybill Shepherd y Bruce Willis, que interpretaban a Maddie Hayes y David Addison, una divertida pareja de detectives privados.

ABC Photo Archives / ABC via Getty Images

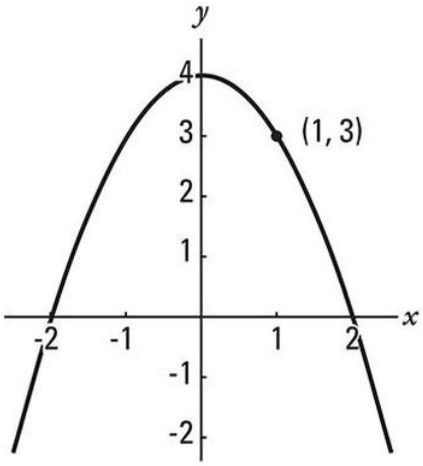
Investigando un caso particularmente difícil, David pregunta al asistente de un juez de instrucción que lance una conjetura respecto a posibles sospechosos. «Ni idea —responde el asistente—, pero ¿sabe lo que no entiendo?». David contesta: «¿Los logaritmos?». Entonces, reaccionando ante la mirada de Maddie, dice: «¿Qué? ¿Tú los entendías?»[41].

Esto resume bastante bien el sentir de la gente en lo que a logaritmos se refiere. La peculiaridad de su nombre es solo parte de su problema de imagen. La mayor parte de la gente no vuelve a utilizarlos una vez terminado el instituto, al menos no de manera consciente, y suelen ignorar los logaritmos que se ocultan tras las escenas de su vida diaria.

La misma realidad se da para otras funciones comentadas en Álgebra II y Cálculo[42]. La función potencia, la función exponencial… ¿cuál era el fin de todas ellas? Mi objetivo en este capítulo es ayudarle a apreciar la función de todas esas funciones, aunque nunca llegue a tener ocasión de pulsar sus botones en la calculadora.

Un matemático necesita funciones por la misma razón que un obrero necesita martillos y taladros. Las herramientas transforman las cosas. Lo mismo hacen las funciones. De hecho, los matemáticos suelen referirse a ellas como «transformaciones». Pero, en lugar de madera y acero, el material que emplean las funciones son números, formas y, a veces, incluso otras funciones.

Para que me entienda, tracemos el gráfico de la ecuación $y = 4 - x^2$. Quizá recuerde cómo funcionaba este tipo de actividad: se dibuja el plano *xy* con el eje de *x* en horizontal y el de *y* en vertical. Luego, por cada *x*, se computa la *y* correspondiente y se trazan como un solo punto en el plano *xy*. Por ejemplo, cuando *x* es 1, la ecuación dice $y = 4 - 1^2$, que es 4 − 1, o 3. Así $(x,y) = (1,3)$ es un punto en el gráfico. Tras calcular y trazar unos cuantos puntos más, emerge la siguiente imagen:



La forma arqueada de la curva se debe a la acción de las tenazas matemáticas. En la ecuación de *y*, la función que transforma *x* en x^2 se comporta de manera muy parecida a una máquina que dobla objetos. Cuando se aplica a cada punto en una parte del eje *x* (que puede visualizar como un trozo recto de cable), las tenazas doblan y alargan ese trozo hasta lograr ese arco curvado hacia abajo que vemos arriba.

¿Y qué papel juega el 4 en la ecuación $y = 4 - x^2$? Funciona como un clavo sosteniendo un cuadro en la pared. Eleva el arco del cable doblado 4 unidades. Puesto que eleva todos los puntos la misma cantidad, se conoce como función constante.

Este ejemplo ilustra la naturaleza dual de las funciones. En primer lugar, son herramientas: x^2 dobla el trozo del eje *x* y el 4 lo levanta. Por otra parte, son bloques de construcción: 4 y $-x^2$ pueden verse como partes componentes de una función más complicada, $4 - x^2$, al igual que los cables, pilas y transistores son partes que componen una radio.

Una vez que empiece a contemplar así las cosas, verá funciones en todas partes. La curva arqueada del ejemplo —técnicamente conocida como «parábola»— es la firma de la función cuadrática x^2 operando entre bambalinas. Obsérvela mientras bebe agua de una fuente o al contemplar cómo un balón de baloncesto traza un arco en el aire cuando se dirige a la canasta. Y si le sobran unos minutos en una escala en el aeropuerto internacional de Detroit, asegúrese de que visita la fuente de la terminal Delta para ver en acción parábolas asombrosas[43].

Photograph © 2011 WET. Todos los derechos reservados.

Las parábolas y las constantes se asocian con una clase más amplia de funciones: las funciones potencia con la forma x^n, en las que la variable x se eleva a una potencia fija n. Para una parábola, $n = 2$; para una constante, $n = 0$.

Cambiar el valor de n nos trae otras herramientas útiles. Por ejemplo, elevar x a la primera potencia ($n = 1$) da una función que actúa como una rampa, una pendiente constante de crecimiento o decrecimiento. Se llama función lineal porque su gráfico xy es una línea. Si usted dejara un cubo al aire libre bajo una lluvia constante, el agua de la parte inferior subiría de forma lineal en el tiempo.

Otra herramienta útil es la función cuadrática inversa, $1/x^2$, correspondiente al caso $n = -2$. (La potencia se convierte en -2 porque la función es un cuadrado *inverso;* la x^2 aparece en el denominador). Esta función es buena para describir cómo las ondas y fuerzas se atenúan a medida que se esparcen en tres dimensiones; por ejemplo, cómo un sonido se suaviza si se aleja de su fuente.

Funciones potencia como estas son los pilares que utilizan científicos e ingenieros para describir el crecimiento y caída en sus formas más suaves.

Pero cuando se necesita dinamita matemática, es el momento de desembalar las funciones exponenciales. Describen todo tipo de crecimiento explosivo, desde las

reacciones nucleares en cadena, hasta la proliferación de las bacterias en una placa de Petri. El ejemplo más familiar es la función 10^x, en la que el 10 se eleva a la potencia x. Asegúrese de no confundir estas funciones con las funciones potencia anteriores. Aquí, el exponente (la potencia x) es variable, y la base (el número 10) es constante, mientras que en las funciones potencia como x^2 es al revés. Este cambio supone una enorme diferencia: a medida que x se hace más y más grande, una función exponencial de x al final crecerá más rápido que *cualquier* otra función potencia, independientemente del valor de la potencia. El crecimiento exponencial es casi inimaginablemente rápido.

Por eso es tan difícil doblar un folio de papel por la mitad más de siete u ocho veces [44]. Cada pliegue casi duplica el grosor, provocando un crecimiento exponencial. Mientras tanto, la longitud del folio se reduce a la mitad y por tanto *decrece* exponencialmente rápido. Tomando una hoja de un cuaderno estándar, tras siete pliegues, el folio queda más grueso que largo, por lo que no puede doblarse de nuevo. No importa lo fuerte que sea la persona que pretende doblarlo. Para considerar que una hoja ha sido legítimamente doblada n veces, el fajo resultante debe tener 2^n capas en línea recta; esto no puede darse si el fajo es más grueso que largo.

Se pensó que el reto era imposible, hasta que Britney Gallivan, por aquel entonces en el penúltimo año de instituto, lo resolvió en 2002. Comenzó derivando una fórmula

$$L = \frac{\pi T}{6}(2^n + 4)(2^n - 1)$$

que predecía el número máximo de veces, n, que un papel de determinado grosor T y longitud L podía doblarse en una dirección. Observe la prohibitiva presencia de la función exponencial 2^n en dos lugares: uno para dar cuenta del duplicado del grosor del papel cada vez que se dobla y otro para dar cuenta de la disminución de su longitud.

Utilizando su fórmula, Britney llegó a la conclusión de que necesitaría utilizar un rollo especial de papel higiénico de unos tres cuartos de milla de largo. Compró el papel, y en enero de 2002 fue a un centro comercial de su ciudad, Pomona,

California, y desenrolló el papel. Siete horas más tarde, con la ayuda de sus padres, acabó con el récord mundial al doblar el papel por la mitad ¡doce veces!

En teoría, se supone que el crecimiento exponencial debe también alegrar su cuenta corriente. Si su dinero crece a una tasa de interés anual de r, después de un año valdrá $(1 + r)$ veces su depósito original; tras dos años, $(1 + r)^2$; tras x años, $(1 + r)^x$ veces el depósito inicial. Así, el milagro del interés compuesto del que tanto oímos hablar lo causa el crecimiento exponencial en acción.

Lo que nos trae de nuevo a los logaritmos. Los necesitamos porque es útil tener herramientas que puedan deshacer las acciones de otras herramientas. De la misma manera que cualquier oficinista necesita una grapadora y un quitagrapas, todo matemático necesita funciones exponenciales *y* logaritmos. Son inversas. Esto significa que si teclea un número x en su calculadora y luego pulsa el botón «10^x» seguido del botón «log x», volverá al número con el que empezó. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces 10^x sería 10^2, que es igual a 100. Extraer el logaritmo de esa cifra devuelve el resultado a 2; el botón «log» deshace la acción del botón «10^x». De ahí que log (100) sea igual a 2. Del mismo modo, log (100) = 3 y log (10 00) = 4, porque $100 = 10^3$ y $10\ 00 = 10^4$.

Reparemos en algo mágico: a medida que los números dentro de los logaritmos crecen *multiplicativamente*, aumentando por 10 veces (de 100 a 100 a 10 00…), sus logaritmos crecen *aditivamente* (2, 3, 4…). Nuestro cerebro realiza un truco similar cada vez que escuchamos música. Las frecuencias de las notas en una escala —do, re, mi, fa, sol, la, si, do— nos suenan como si ascendieran en *pasos* iguales. Pero objetivamente, sus frecuencias vibratorias suben en *múltiplos* iguales. Percibimos el tono logarítmicamente[45].

Allá donde aparecen, desde la escala de Richter para medir la magnitud de un terremoto a las medidas de pH, los logaritmos son excelentes compresores. Son ideales para tomar cantidades que varían con márgenes muy amplios y apretarlas para que sean más manejables. Por ejemplo, 100 y 100 millones difieren en un millón por unidad inicial, un abismo que la mayoría de nosotros encontramos incomprensible. Pero sus logaritmos difieren solo en cuatro (son 2 y 8, porque $100 = 10^2$ y 100 millones $= 10^8$). Cuando hablamos, todos utilizamos una versión burda de taquigrafía logarítmica al referirnos a cualquier salario entre 100 00 dólares y 999 999 dólares como a salarios de seis cifras. Ese «seis» es, más o menos, el logaritmo de estos salarios, que de hecho abarcan el intervalo de cinco a seis.

Por muy impresionantes que puedan resultar estas funciones, la caja de herramientas de un matemático no da para tanto, razón por la que aún no he montado mis estanterías de Ikea.

Tercera parte
Formas

Contenido:

§12. Una imagen vale más que mil números
§13. Algo de la nada
§14. La conspiración cónica
§15. Sine qua non
§16. Llevar al límite

§12. Una imagen vale más que mil números

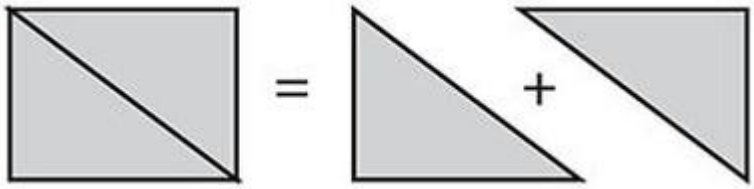
Apuesto a que puedo adivinar cuál era su materia matemática preferida en el instituto: la geometría.

He conocido mucha gente a lo largo de los años que me ha expresado su cariño por esa materia. ¿Será porque la geometría se da en el lado derecho del cerebro y eso atrae a los pensadores visuales que, de otra manera, se estremecerían ante su fría lógica? Puede ser. Pero hay quien me dice que adoraba la geometría precisamente porque *era* tan lógica. El razonamiento paso a paso, con cada nuevo teorema apoyándose firmemente en aquellos ya establecidos, esa es la fuente de satisfacción para muchos.

Pero creo acertar al presentir (y, reconozco sin ambages, yo adoro la geometría) que la gente la disfruta porque *casa* la lógica con la intuición. Es un gusto utilizar ambos lados del cerebro.

Para ilustrar los placeres de la geometría, revisitemos el teorema de Pitágoras[46], que usted recordará como $a^2 + b^2 = c^2$. Parte de nuestro objetivo es demostrar por qué es cierto y apreciar por qué importa. Además de eso, probando el teorema de dos maneras distintas, veremos cómo una demostración puede ser más elegante que otra, aunque ambas sean correctas.

El teorema de Pitágoras se refiere a triángulos rectángulos, es decir, aquellos con un ángulo recto (90 grados) en una de las esquinas. Los triángulos rectángulos son importantes porque son lo que se obtiene al cortar un rectángulo por la mitad a lo largo de la diagonal.

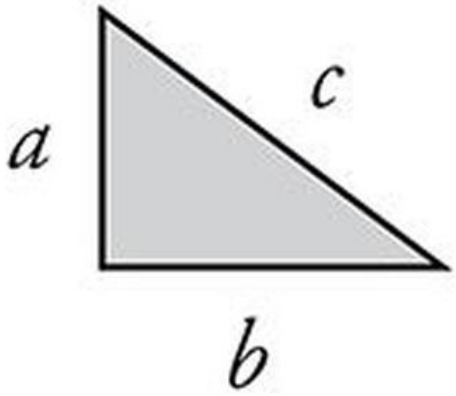


Y puesto que los rectángulos suelen aparecer en todo tipo de escenarios, también lo hacen los triángulos rectángulos.

Aparecen, por ejemplo, en topografía. Si se está midiendo un campo rectangular, podría querer averiguarse qué distancia existe de una esquina a la esquina diagonalmente opuesta. (Por cierto, aquí es donde nació la geometría, en problemas de medida de tierras, o midiendo la Tierra: *geo-* = «Tierra» y *-metría* = «medida»).

El teorema de Pitágoras nos dice cuánto mide la diagonal en relación con los lados del rectángulo. Si un lado mide a y el otro b, el teorema dice que la diagonal tiene longitud c, siendo:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Por alguna razón, la diagonal se conoce tradicionalmente como la hipotenusa[47], aunque nunca he conocido a nadie que supiera por qué (¿algún experto en griego o latín por ahí?). Debe tener que ver con que la diagonal subtienda el ángulo recto, pero en términos de jerga, «subtiende» está al mismo nivel de opacidad que «hipotenusa».

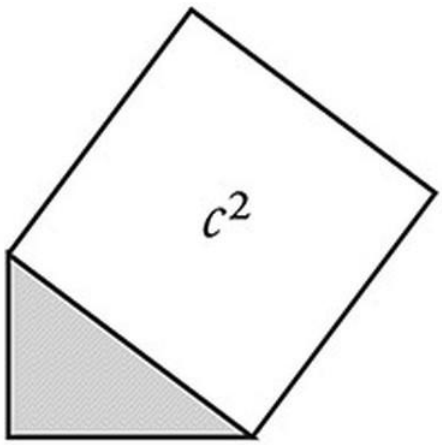
En cualquier caso, el teorema funciona así. Para que sean números sencillos, digamos que a = 3 yardas y b = 4 yardas. Entonces, para averiguar la medida desconocida de c, nos ponemos las capuchas negras y entonamos que c^2 es la suma

de 3^2 más 4^2, que es 9 más 16. (No olvide que todas estas cantidades se miden ahora en yardas al cuadrado, puesto que hemos cuadrado tanto las yardas como los números mismos). Finalmente, puesto que 9 + 16 = 25, obtenemos $c^2 = 25$ yardas cuadradas, luego calculando las raíces cuadradas de ambos lados obtenemos $c = 5$ yardas como medida de la hipotenusa.

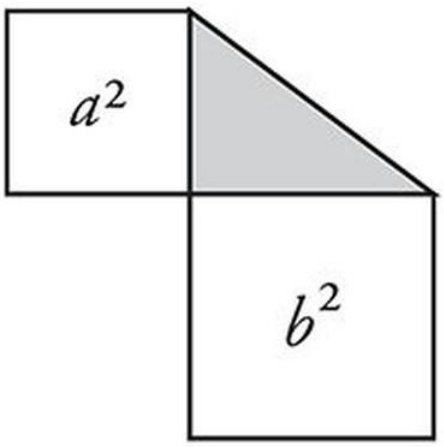
Este modo de aproximarse al teorema de Pitágoras lo hace parecer una declaración acerca de longitudes, pero tradicionalmente se veía como una declaración sobre *áreas*. Esto se ve de manera más clara al escuchar cómo solían expresarlo:

> *El cuadrado en la hipotenusa es la suma de los cuadrados en los otros dos lados.*

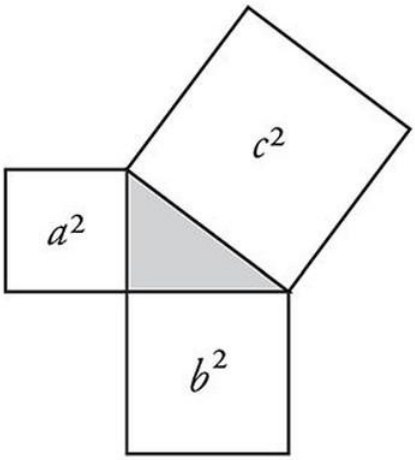
Fíjese en la palabra «en». No estamos hablando del cuadrado *de* la hipotenusa, ese es un nuevo concepto algebraico sobre multiplicar un número (la longitud de la hipotenusa) por sí mismo. No, nos referimos aquí al cuadrado que literalmente se apoya en la hipotenusa, así:



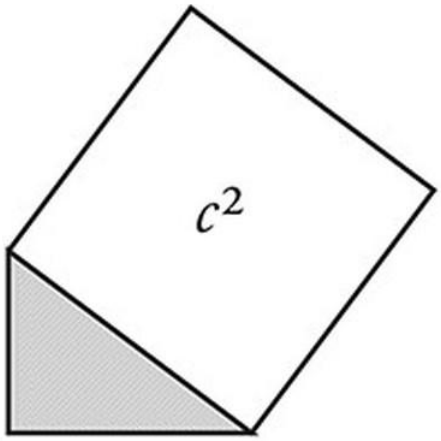
Llamemos a este el cuadrado grande, para distinguirlo del pequeño y el mediano que podemos construir en los otros dos lados.



Luego, el teorema dice que el cuadrado grande tiene la misma área que los cuadrados pequeño y mediano unidos.
Durante miles de años, este maravilloso hecho se ha expresado en un diagrama, una nemotécnica icónica de baile de cuadrados.

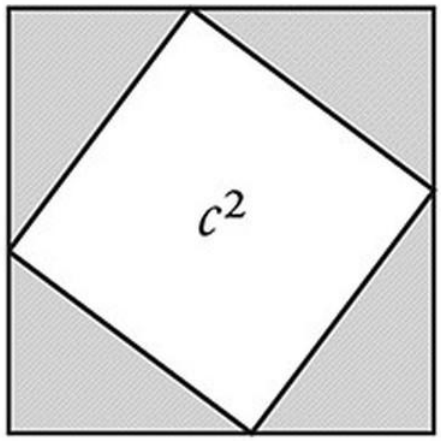


Ver el teorema en términos de áreas lo hace más divertido. Por ejemplo, puede ponerlo a prueba —y luego comérselo— construyendo los cuadrados con galletas[48]. O puede tratarlo como un puzle infantil, con piezas de diferentes formas y tamaños. Reordenando estas piezas del puzle, podemos fácilmente demostrar el teorema de la siguiente manera.
Volvamos al cuadrado inclinado sobre la hipotenusa.



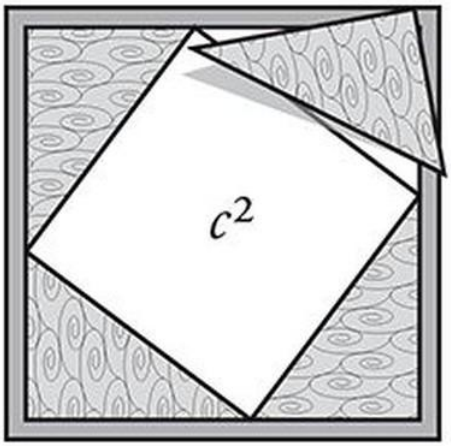
Instintivamente, debe inquietarle un tanto esta imagen. El cuadrado parece potencialmente inestable, como si pudiera caerse o deslizarse por la rampa. Y existe también una arbitrariedad desagradable en torno a cuál de los cuatro lados del cuadrado toca el triángulo.

Guiados por estas sensaciones intuitivas, añadamos tres copias más del triángulo alrededor del cuadrado para que parezca más sólido y simétrico.

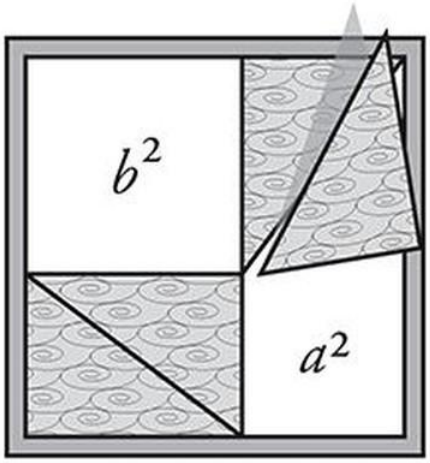


Ahora recuerde lo que intentamos demostrar: que el cuadrado blanco inclinado del dibujo anterior (que no es más que nuestro cuadrado grande de antes —aún está sobre la hipotenusa—) tiene la misma área que los cuadrados pequeño y mediano unidos. Pero ¿dónde están esos cuadrados? Bueno, hay que mover algunos triángulos para encontrarlos.

Piense que el dibujo anterior representa un puzle, con cuatro piezas triangulares en las esquinas de un marco rígido.



En esta interpretación, el cuadrado inclinado es el espacio vacío en mitad del puzle. El resto del área dentro del marco lo ocupan las piezas del puzle.
Ahora, tratemos de mover las piezas de varias maneras. Por supuesto, nada de lo que hagamos podría cambiar el espacio vacío total dentro del marco: es siempre el área que se encuentra más allá de las piezas.
La lluvia de ideas es, por tanto, para reordenar las piezas así:

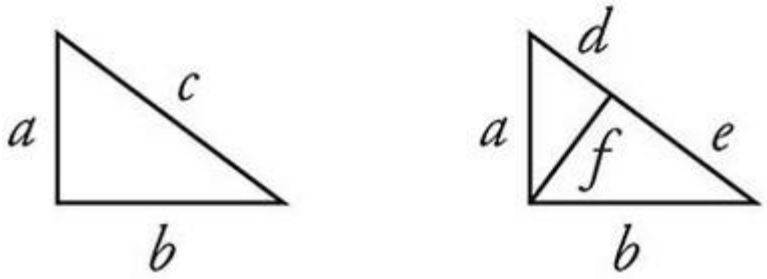


De repente, el espacio vacío se ha convertido en las dos formas que buscamos: el cuadrado pequeño y el cuadrado mediano. Y puesto que el total de espacio vacío no varía, ¡acabamos de demostrar el teorema de Pitágoras!

Esta demostración hace mucho más que convencer; *ilumina*. Es lo que la hace elegante.

Para comparar, he aquí otra demostración[49]. Es igualmente famosa y quizá la más sencilla de cuantas evitan usar áreas.

Como antes, considere un triángulo cuyos lados tienen longitud *a* y *b* e hipotenusa de longitud *c*, como se muestra en el dibujo de la izquierda.



Ahora, por inspiración divina o por un momento de genialidad, algo nos dice que dibujemos una línea perpendicular a la hipotenusa que baje hasta la esquina opuesta, como muestra el triángulo de la derecha.

Esta inteligente construcción crea dos triángulos más pequeños dentro del original. Es sencillo demostrar que todos estos triángulos son similares, lo que significa que tienen formas idénticas pero tamaños distintos. Eso implica que las longitudes de sus partes correspondientes tienen las mismas proporciones, lo que se traduce en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$a/f = b/e = c/b$$

$$a/d = b/f = c/a$$

También sabemos que

$$c = d + e$$

porque nuestra construcción simplemente dividió la hipotenusa original, de longitud *c*, en dos lados menores de longitudes *d* y *e*.

En este momento, quizá se encuentre algo perdido, o por lo menos inseguro sobre el siguiente paso. Tenemos ya una pila de cinco ecuaciones y estamos tratando de reducirlas para deducir que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Inténtelo durante unos minutos, verá que dos de las ecuaciones son irrelevantes. Eso es feo; una demostración elegante no debería incluir nada superfluo. Claro que, *a posteriori*, pensará que nunca debería haber incluido esas ecuaciones. Pero ya no vamos a intentar maquillarla para disimular.

Sin embargo, manipulando las tres ecuaciones correctas, podemos hacer que el teorema se haga evidente[50].

¿Estaría de acuerdo conmigo en que, en términos estéticos, esta demostración es inferior a la primera? En primer lugar, se arrastra hasta el final. ¿Y quién ha invitado a la fiesta a tanta álgebra? Se supone que este es un acto de geometría.

Pero un defecto más serio de la demostración es su lobreguez. Para cuando termine de arrastrarse por ella, puede que se crea el teorema (a regañadientes), pero puede que aún no *vea* que es cierto.

Dejando a un lado la demostración, ¿por qué es importante el teorema de Pitágoras? Porque revela una verdad fundamental acerca de la naturaleza del espacio. Implica que el espacio es plano, en lugar de curvo. Para la superficie de una esfera o un donut, por ejemplo, el teorema tiene que ser modificado. Einstein se enfrentó a este reto en su teoría general de la relatividad (donde la gravedad no se ve ya como una fuerza, sino como una manifestación de la curvatura del espacio), y también lo hizo Bernhard Riemann, y otros antes que él, cuando se colocaban los cimientos de la geometría no euclídea.

Hay un largo camino de Pitágoras a Einstein, pero al menos es en línea recta… en su mayor parte.

§13. Algo de la nada

Todo curso de matemáticas contiene al menos un tema notablemente difícil. En aritmética es la división larga; en álgebra, los problemas, y en geometría son las demostraciones.

La mayoría de los alumnos que cursan geometría nunca antes han visto una demostración. La experiencia puede ser un shock, así que tal vez sea pertinente una señal de advertencia, algo así:

> *Las demostraciones pueden provocar mareos o excesiva somnolencia. Los efectos secundarios tras una exposición prolongada podrían incluir: sudores nocturnos, ataques de pánico y, en casos raros, euforia. Pregunte a su médico si las demostraciones se ajustan a usted*.

Por muy desorientadoras que puedan resultar las demostraciones, aprender a realizarlas se ha creído siempre esencial en una educación liberal —más esencial que la asignatura en cuestión, dirían algunos—. De acuerdo con esta visión, la geometría es positiva para la mente; la entrena para pensar con claridad y lógica. Lo que importa no es el estudio de triángulos, círculos y líneas paralelas *per se*. Lo importante es el método axiomático, el proceso de construir un argumento riguroso, paso a paso, hasta que se establece la conclusión deseada.

Euclides[51] estableció este enfoque deductivo en los *Elementos* (hoy el libro de texto más editado de la historia) hace 2300 años. Desde entonces, la geometría euclídea ha sido un modelo para el pensamiento lógico en todos los ámbitos de la vida, desde la ciencia y el derecho a la filosofía y la política. Por ejemplo, Isaac Newton canaliza a Euclides en *Los principios matemáticos de la filosofía natural*. Utilizando demostraciones geométricas, dedujo las leyes de Kepler y Galileo acerca de proyectiles y planetas de sus propias leyes de movimiento y gravedad. La *Ética* de Spinoza sigue el mismo patrón; su título completo es *Ethica Ordine Geometrico Demonstrata (Ética demostrada al modo geométrico)*. Los ecos de Euclides pueden hallarse hasta en la Declaración de Independencia de Estados Unidos. Cuando Thomas Jefferson escribió: «Consideramos de por sí evidentes estas verdades», estaba imitando el estilo de los *Elementos*[52]. Euclides había comenzado con definiciones, postulados y verdades evidentes de la geometría —los axiomas— y desde ellos erigió una estructura de proposiciones y demostraciones. Una verdad conducía a la siguiente mediante una lógica irrefutable. Jefferson organizó la Declaración de la misma manera, con el fin de que su conclusión —que las colonias tenían derecho a gobernarse a sí mismas— se mostrara tan inevitable como un hecho geométrico.

Si ese legado intelectual parece descabellado, tenga en mente que Jefferson veneraba a Euclides. El 12 de enero de 1812, unos años después de terminar su

segundo mandato como presidente y de salir de la vida pública, escribió a su viejo amigo John Adams acerca de los placeres de dejar atrás la política: «He abandonado los periódicos a cambio de Tácito y Tucídides, de Newton y Euclides, y me encuentro mucho más feliz».

Pero lo que falta en toda esta adoración de la racionalidad euclídea es una apreciación de los aspectos más intuitivos de la geometría. Sin inspiración, no habría demostraciones —o teoremas que demostrar—. Al igual que la composición musical o la escritura, la geometría requiere sacar algo de la nada. ¿Cómo da un poeta con las palabras adecuadas o un compositor con una melodía inolvidable? Este es el misterio de las musas y no es menor misterio en las matemáticas que en otras artes creativas.

Como ejemplo, considere el problema de construir un triángulo equilátero, esto es, un triángulo con los tres lados de igual longitud[53]. Las reglas del juego son las siguientes: se le da un lado del triángulo, el segmento que aquí aparece:

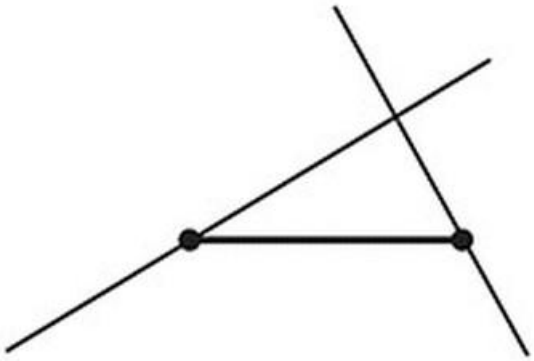
Su labor es utilizar ese segmento para construir los otros dos lados y demostrar que ambos tienen la misma longitud que el original. Las únicas herramientas a su disposición son una regla y un compás. La regla le permite trazar una línea recta de cualquier longitud, así como trazarla entre dos puntos cualesquiera. El compás le permite dibujar un círculo de cualquier radio, centrado en cualquier punto.

En este caso, la regla no sirve para medir, no tiene ninguna marca para medir longitudes (concretamente, no puede utilizarla para copiar o medir el segmento original). El compás tampoco puede utilizarse como transportador de ángulos; lo único que puede hacer es dibujar círculos, no medir ángulos.

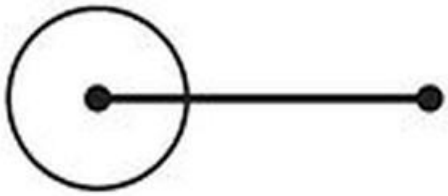
¿Preparado? Comience.

Este es el momento de parálisis, ¿por dónde empezar?

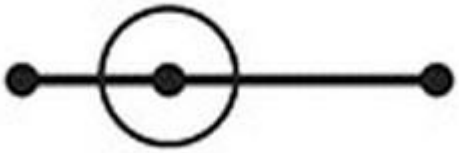
La lógica no le será de ayuda. Los resuelveproblemas cualificados saben que la mejor manera de enfocarlo es relajarse y jugar con el rompecabezas con la esperanza de que la idea aparezca. Por ejemplo, quizá ayudaría utilizar la regla para dibujar líneas inclinadas a través de los bordes del segmento, así:



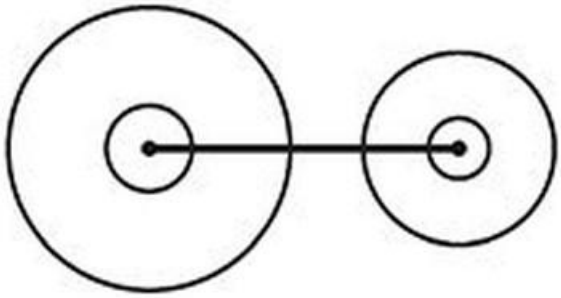
No ha habido suerte. Aunque las líneas formen un triángulo, no hay garantía de que sea un triángulo *equilátero*.
Podríamos seguir dando palos de ciego dibujando algunos círculos con el compás, pero ¿dónde? ¿Alrededor de uno de los puntos finales?



¿O alrededor de un punto dentro del segmento?

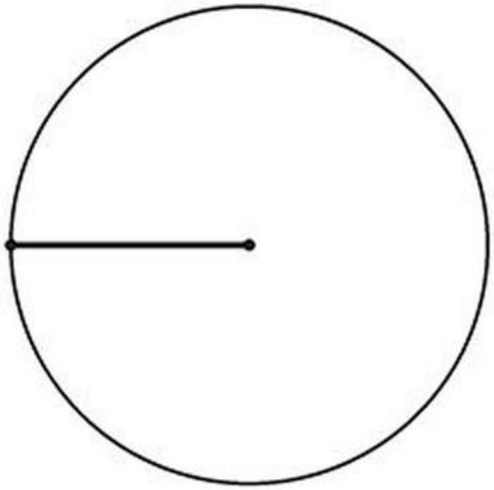


La segunda opción parece poco prometedora, puesto que no hay razón para elegir un punto interior en lugar de otro.
Así que volvamos a lo de trazar círculos alrededor de los puntos finales.

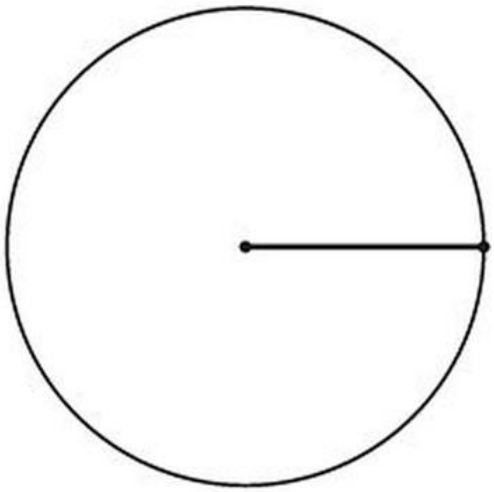


Desgraciadamente, aún existe mucha arbitrariedad. ¿Qué tamaño deben tener los círculos? Todavía no nos asalta ninguna idea.

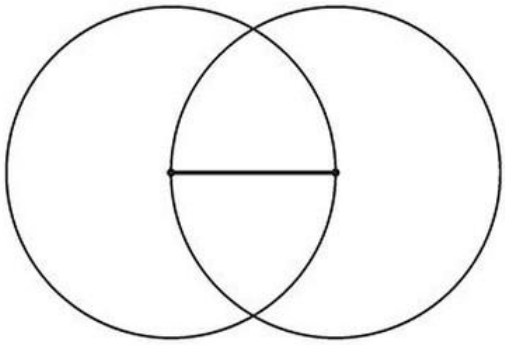
Tras unos minutos dándole vueltas a esto, la frustración (y un inminente dolor de cabeza) nos tentará a rendirnos. Pero si no nos rendimos, puede que tengamos suerte y nos demos cuenta de que solo hay un posible círculo natural. Veamos qué sucedería si colocamos la punta afilada del compás en uno de los puntos finales del segmento y el lapicero en el otro y giramos el compás hasta completar el círculo. Obtendríamos esto:



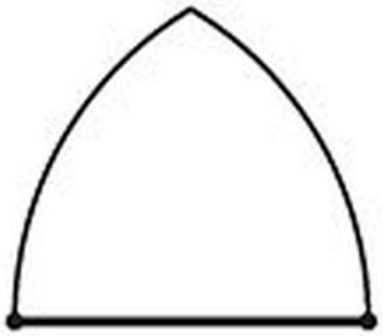
Claro que si utilizáramos el otro punto como centro, obtendríamos esto:



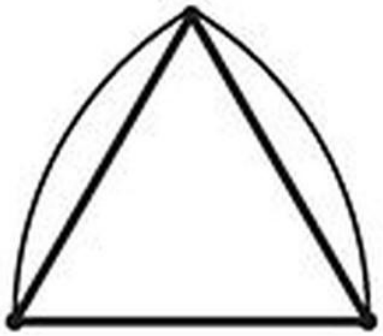
¿Y si dibujamos ambos círculos al mismo tiempo, sin motivo alguno, por improvisar?



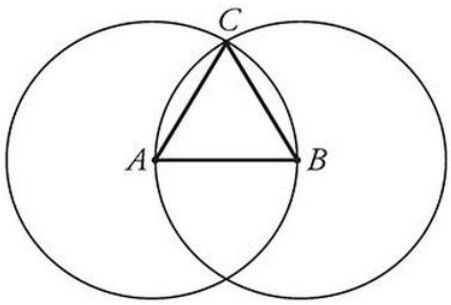
¿Acaba de golpearle? ¿Un escalofrío de lucidez? Vuelva a mirar el diagrama. Hay una versión curva del triángulo equilátero mirándonos fijamente. Su esquina superior es el punto donde se cruzan los círculos.



Ahora convirtámoslo en un triángulo real, con lados rectos, dibujando líneas desde el punto de intersección hasta los puntos finales del segmento original. El triángulo resultante, sin duda parece equilátero.



Hemos permitido que la intuición nos guiara hasta aquí, pero ahora, y solo ahora, es el momento de que la lógica recoja el testigo y termine la demostración. Para mayor claridad, veamos de nuevo el diagrama completo y numeremos los puntos de interés *A*, *B* y *C*.

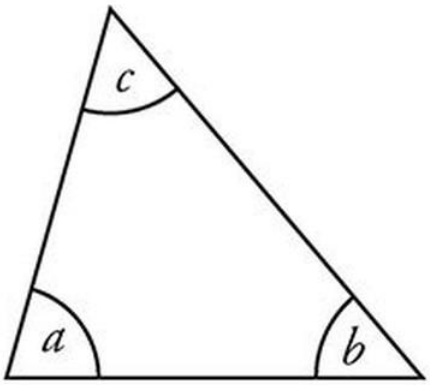


La demostración casi se prueba a sí misma. Los lados *AC* y *BC* tienen la misma longitud que el segmento original *AB*, puesto que así hemos construido los círculos; utilizamos *AB* como el radio de ambos. Puesto que *AC* y *BC* son también radios, también tienen la misma longitud, así que las tres longitudes son iguales, y el triángulo es equilátero. QED.

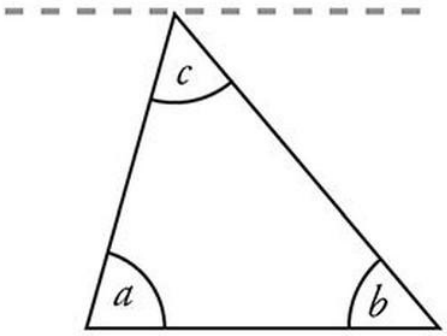
Este argumento existe desde hace siglos. De hecho, es el punto de partida de Euclides —la primera proposición del primer libro de los *Elementos*—. Pero la tendencia ha sido siempre presentar el diagrama final con esos artísticos círculos ya colocados, lo cual priva al alumno del disfrute de descubrirlos. Ese es un fallo pedagógico. Esta es una prueba que todo el mundo puede encontrar. Puede ser novedosa para cada generación, si la explicamos bien.

La clave de esta demostración fue, claramente, la inspirada construcción de los dos círculos. Otro resultado más famoso dentro de la geometría puede probarse a través de una construcción igualmente hábil. Es el teorema de que los ángulos de un triángulo suman 180 grados.

En este caso, la mejor demostración no es la de Euclides, sino una más antigua atribuida a los pitagóricos. Funciona así: tome cualquier triángulo y llame a sus ángulos *a, b, c*.

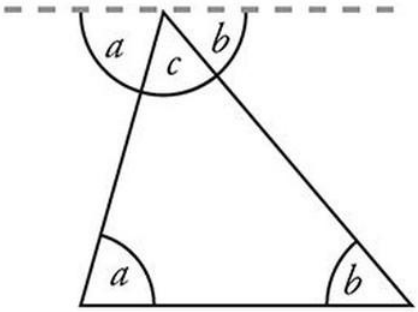


Dibuje una línea paralela a la base que pase por la esquina superior.



Ahora necesitamos hacer una pequeña digresión para recordar una propiedad de las líneas paralelas: si otra línea atraviesa dos líneas paralelas de la siguiente manera:

los ángulos llamados *a* y *b* (conocidos en el mundillo como ángulos alternos internos) son iguales.
Apliquemos este hecho a la construcción anterior, en la que dibujamos una línea a través de la esquina superior del triángulo en paralelo a su base.



Invocando la igualdad de los ángulos alternos internos, vemos que el ángulo que queda a la izquierda de la esquina superior debe ser igual a *a*. De la misma manera, el ángulo de la esquina superior derecha es igual a *b*. Así que los ángulos *a*, *b* y *c* forman juntos un ángulo recto —un ángulo de 180 grados—, que es lo que hemos tratado de demostrar.
Este es uno de los argumentos más vigorosos de la matemática. Surge como un rayo, con la construcción de una línea paralela. Una vez trazada esa línea, la demostración prácticamente se eleva de la mesa y camina sola, como la creación del doctor Frankenstein.

Y quién sabe, si destacamos este otro lado de la geometría —su lado juguetón e intuitivo, donde una chispa de imaginación puede ser rápidamente convertida en una demostración—, quizá algún día todos los alumnos la recuerden como la asignatura en la que aprendieron a ser lógicos *y* creativos[54].

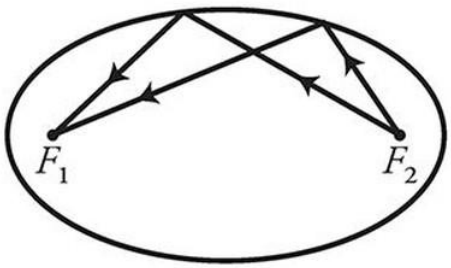
§14. La conspiración cónica

Las galerías de los susurros son extraordinarios espacios acústicos que se pueden encontrar bajo ciertas cúpulas, bóvedas o techos curvos. Hay una muy conocida a la salida del restaurante Oyster Bar en la Estación Grand Central de Nueva York. Es un lugar divertido para llevar a una cita: se pueden intercambiar palabras cariñosas a doce metros de distancia y separados por un pasillo bullicioso. Se escucharían con toda claridad, pero los pasajeros no oirían ni una palabra.

Garry Jenkins

Para producir este efecto, ambos deberían colocarse en esquinas diagonalmente opuestas, de cara a la pared. Eso coloca a cada uno cerca de un foco, un punto especial desde el que el sonido de la voz converge mientras reflecta del techo y las paredes curvas del pasillo. Normalmente, las ondas de sonido viajan en todas direcciones y rebotan en las paredes en momentos y lugares dispares, embrollándose tanto que resultan inaudibles cuando alcanzan a un oyente a doce metros de distancia (por esa razón, quienes pasean por ahí no escuchan lo que dice). Pero cuando lo suspira a un *foco*, las ondas reflectantes llegan todas al *mismo* tiempo al otro foco, reforzándose de esta manera unas a otras y permitiendo que las palabras se escuchen.

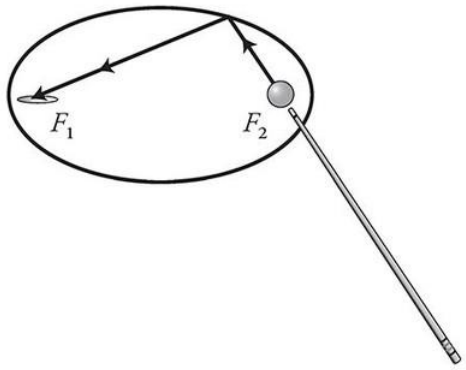
Las elipses muestran un estilo de enfoque similar, aunque de manera más simple. Si creamos un reflector en forma de elipse, los puntos particulares dentro de ella (marcados como F_1 y F_2 en la figura que sigue) actuarán como focos en el sentido de que todos los rayos que emanan de una fuente de luz en uno de estos puntos serán reflectados hacia el otro.



Permítanme que intente explicarle lo asombroso que es replanteándolo con algunos ejemplos.

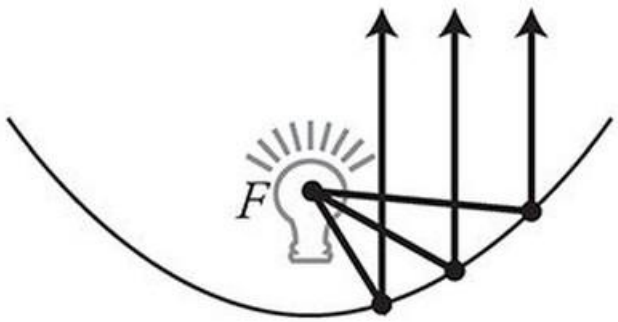
Supongamos que a Darth Vader y Luke Skywalker les gusta jugar a *laser tag* en un recinto elíptico con paredes llenas de espejos. Ambos han acordado no dispararse directamente, tienen que aniquilarse con disparos rebotados. Darth, no muy conocedor de la geometría ni la óptica, sugiere que se sitúen en un punto de foco. «De acuerdo», dice Luke, «siempre y cuando yo pueda disparar primero». Bueno, la verdad es que no sería un duelo demasiado trepidante, puesto que Luke no puede fallar. Independientemente de la torpeza con la que apunte, siempre dará a Darth. Todo disparo será ganador.

Si su deporte es el billar, imagínese jugando en una tabla elíptica con un agujero situado en uno de los focos. Para preparar un tiro trucado que tenga la garantía de no fallar, coloque la bola blanca en el *otro* foco. Independientemente de cómo golpee la bola y contra qué parte del tapete rebote, siempre entrará en el agujero.



Las curvas y las superficies parabólicas tienen un poder de enfoque impresionante: cada una puede tomar las ondas paralelas que llegan y enfocarlas a un *único* punto. Esta cualidad de su geometría ha sido útil en entornos en los que las ondas de luz, sonido u otras señales necesitaban ser amplificadas. Por ejemplo, los micrófonos parabólicos pueden emplearse para recoger conversaciones en tonos muy bajos, y, por tanto, interesan a vigilantes, espías y policías. También resultan útiles en la grabación de la naturaleza, para capturar el canto de los pájaros o el gruñido de los animales, y en el deporte televisado, para escuchar los insultos de un entrenador a un árbitro. Las antenas parabólicas pueden amplificar las ondas de radio en la misma medida, por eso los receptores de televisión y los radiotelescopios gigantes para la astronomía tienen esa forma curvada característica.

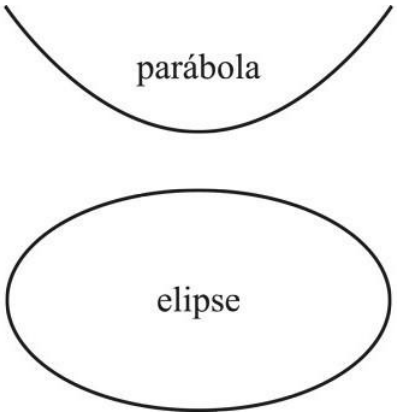
Esta propiedad de enfoque de las parábolas es igualmente útil cuando se despliega en sentido inverso. Supongamos que quiere provocar un haz de luz totalmente direccional, como el de los teatros o las luces de los coches. Una bombilla por sí misma —por muy potente que sea— no será suficiente; desperdicia demasiada luz al brillar en todas direcciones. Pero ahora coloque la bombilla en el foco de un reflector parabólico y *voilà*. La parábola crea un haz direccional automáticamente. Toma los rayos de la bombilla y, reflectándolos en el interior plateado de la parábola, los hace paralelos.



Una vez se repara en las habilidades de enfoque de parábolas y elipses[55], es imposible no preguntarse si detrás no hay en marcha algo más profundo. ¿Se relacionan estas curvas de alguna otra manera fundamental?

Los matemáticos y los teóricos de la conspiración tenemos algo en común: sospechamos de las coincidencias, especialmente de las que resultan convenientes. No hay accidentes. Las cosas suceden por alguna razón. Aunque esta forma de pensar pueda tener un toque paranoico si se aplica a la vida real, es una manera sensata de concebir las matemáticas. En el mundo ideal de formas y números, las extrañas coincidencias suelen *ser* prueba de que algo se nos está escapando. Sugieren la presencia de fuerzas ocultas.

Así que ahondemos en los posibles vínculos entre parábolas y elipses. A primera vista parecen una pareja improbable. Las parábolas tienen forma arqueada y son expansivas, se extienden por ambos extremos. Las elipses tienen forma ovalada, como círculos aplastados, son cerradas y compactas.

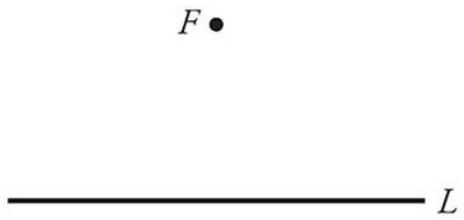


Pero cuando se mira más allá de la apariencia y se explora su anatomía interna, comienza uno a darse cuenta de lo similares que son. Ambas pertenecen a una

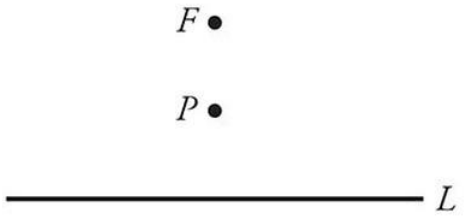
familia real de curvas, una vinculación genética que se hace evidente una vez que sabemos lo que buscamos.

Para explicar cómo se relacionan, tenemos que recordar qué son, exactamente, estas curvas.

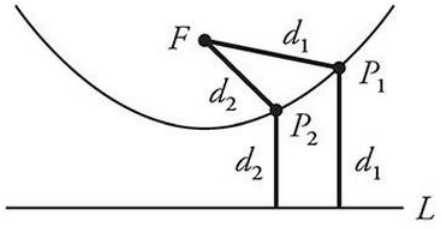
Una parábola suele definirse como el conjunto de todos los puntos equidistantes de un punto determinado y una línea determinada que no contiene ese punto. Esta definición es casi un trabalenguas, pero es sencilla de entender una vez se traduce a imágenes. Llamemos al punto dado *F*, de «foco», y a la línea *L*.



Ahora, de acuerdo con la definición, una parábola consiste en todos los puntos que yacen tan lejos de *F* como de *L*. Como, por ejemplo, el punto *P*, justo debajo de *F*, a medio camino de *L*.

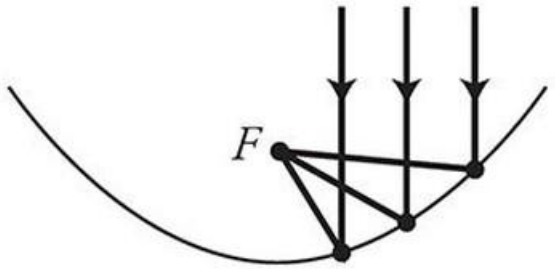


Otros puntos, P_1, P_2,… también sirven, quedando frente a cualquiera de los dos lados, así



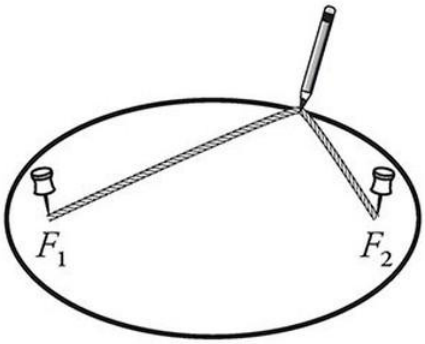
Aquí, el punto P_1 queda a la misma distancia —d_1— de la línea que del foco. Lo mismo sucede con el punto P_2, excepto que ahora la distancia compartida es otro número, d_2. Unidos, todos los puntos P con esta propiedad forman la parábola.

La razón de referirnos al punto F como «foco» se aclara si pensamos en la parábola como en un espejo curvo. Resulta, aunque no lo demostraré, que si se dirige un haz de luz directamente contra un espejo curvo [56], todos los rayos reflectados intersectarán simultáneamente en el punto F, produciendo un punto de luz intensamente focalizado.



Funciona de manera similar a esos reflectores bronceadores que frieron las caras de una generación, en los tiempos en que nadie se preocupaba por el cáncer de piel.

Ahora pasemos a la historia correspondiente a las elipses. Una elipse se define como un conjunto de puntos, cuyas distancias de dos determinados puntos, sumadas, es una constante. Cuando se hace en términos más mundanos, esta descripción proporciona una receta para dibujar una elipse. Coja un lapicero, un folio, una tabla de corcho, dos chinchetas y un trozo de cuerda. Pose el folio en el corcho. Clave los extremos de la cuerda al corcho atravesando el papel, sin apretar demasiado. Ahora tense la cuerda con el lapicero de tal manera que se forme un ángulo, como se muestra en la figura de abajo. Comience a dibujar, manteniendo tensa la cuerda. Una vez que el lapicero haya dado la vuelta a las dos chinchetas y haya vuelto al punto de partida, la curva resultante es una elipse.



Observe cómo esta receta implementa la definición anterior, palabra por palabra. Las chinchetas interpretan el papel de los dos puntos determinados. Y la suma de las distancias, desde esos dos puntos hasta un punto de la curva, siempre permanece constante, independientemente de dónde esté el lapicero, puesto que esas distancias siempre suman la longitud de la cuerda.

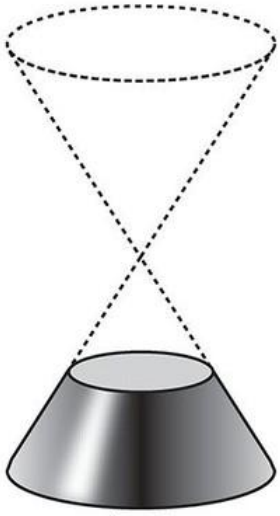
¿Dónde están los focos de la elipse en esta construcción? En las chinchetas. Una vez más no lo demostraré, pero esos son los puntos que permiten que Luke Skywalker y Darth Vader puedan jugar a *laser tag* sin posibilidad de fallar y que dan lugar al acierto perpetuo en el billar.

Parábolas y elipses: ¿por qué ellas, y solo ellas, poseen habilidades tan fantásticas para el enfoque? ¿Qué secreto comparten?

Ambas son secciones transversales de la superficie de un cono.

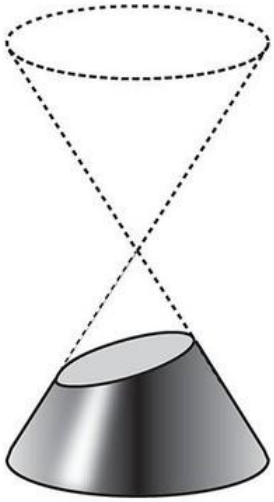
¿Un cono? Si siente que esto acaba de aparecer de la nada, ese era precisamente el objetivo. El papel del cono en todo esto ha estado oculto hasta ahora.

Para ver cómo está implicado, imagínese cortando un cono con un cuchillo de carnicero, como si cortara salami, en ángulos progresivamente más pronunciados. Si los cortes son nivelados, la curva de intersección será un círculo.



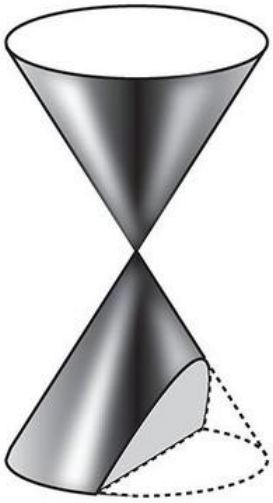
círculo

Si, de lo contrario, el cono se corta en un suave ángulo, la curva resultante será una elipse.



elipse

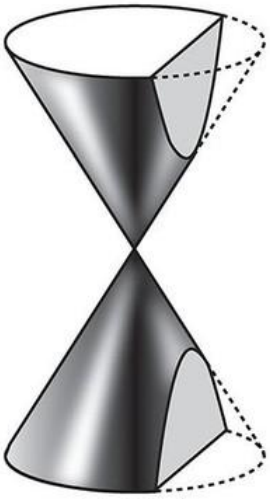
A medida que los cortes se hacen más empinados, la elipse se hace más larga y delgada en sus proporciones. En un ángulo crítico, cuando la inclinación se levanta tanto que coincide con la pendiente del propio cono, la elipse se convierte en una parábola.



parábola

Ese es el secreto: la parábola es una elipse de incógnito, en un sentido restrictivo. Por eso no sorprende que comparta esa gran capacidad de las elipses para el enfoque. Se ha transmitido a través de la sangre.

De hecho, los círculos, elipses y parábolas son todos miembros de una familia más grande y muy unida. Se los conoce colectivamente como secciones cónicas, esto es, curvas obtenidas cortando la superficie del cono con un plano. Además, hay un pariente adicional: si el cono se corta verticalmente, en un sesgo mayor que su propia pendiente, la incisión resultante forma una curva llamada «hipérbola». A diferencia del resto, viene en dos partes, no en una.



hipérbola

Estos cuatro tipos de curva se ven aún más emparentados cuando se observan desde otras perspectivas matemáticas. En álgebra, surgen como gráficos de ecuaciones de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde las constantes *A, B, C,*… determinan si el gráfico es un círculo, una elipse, una parábola o una hipérbola. En cálculo, se manifiestan como trayectorias de objetos arrastrados por la fuerza de la gravedad.

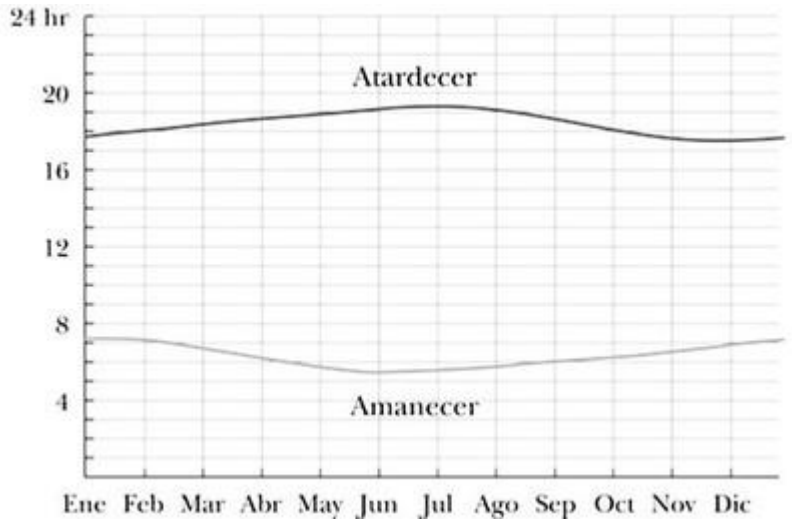
Así que no es accidental que los planetas se muevan en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos; o que los cometas viajen por el sistema solar en trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas; o que la pelota que lanza un niño a su padre siga un arco parabólico. Son todo manifestaciones de la conspiración cónica.

Céntrese en eso la próxima vez que lance una pelota.

§15. «Sine qua non»

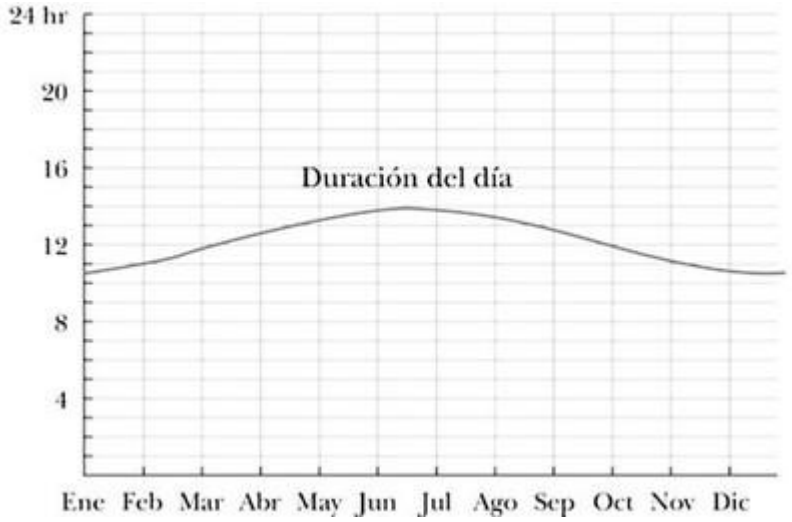
Mi padre tenía un amigo, llamado Dave, que se jubiló en Jupiter, Florida. Le visitamos en unas vacaciones familiares cuando yo tenía unos doce años, y nos enseñó algo que se me quedó indeleblemente grabado.

A Dave le gustaba hacer tablas de los gloriosos amaneceres y atardeceres que podía observar durante todo el año desde su terraza[57]. Todos los días marcaba dos puntos en su tabla y, tras unos cuantos meses, percibió algo curioso. Las dos curvas parecían ondas opuestas. Una solía alzarse mientras la otra caía; cuando amanecía más temprano, atardecía más tarde.



Pero había excepciones. Durante las tres últimas semanas de junio y durante la mayor parte de diciembre y principios de enero, el amanecer y el atardecer llegaban ambos más tarde cada día, dando a las ondas una apariencia algo desigual.

De todos modos, el mensaje de las curvas era inequívoco: la brecha oscilante entre ambos mostraba cómo se alargaban y acortaban los días según el cambio de estaciones. Restando la curva inferior de la superior, Dave descubrió también cuánto variaban las horas de sol a lo largo del año. Para su sorpresa, *esta* curva no era exactamente desequilibrada, era de una hermosa simetría.

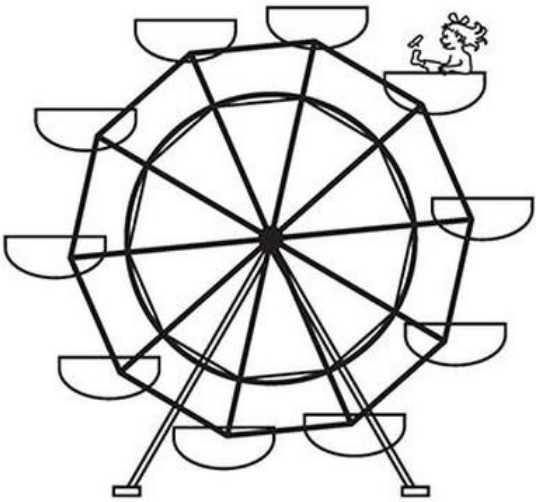


Lo que estaba observando era una onda sinusoidal casi perfecta. Si usted estudió trigonometría [58] en el instituto, puede que haya oído hablar de las ondas sinusoidales, aunque su profesor quizá hablara más de la función seno, una

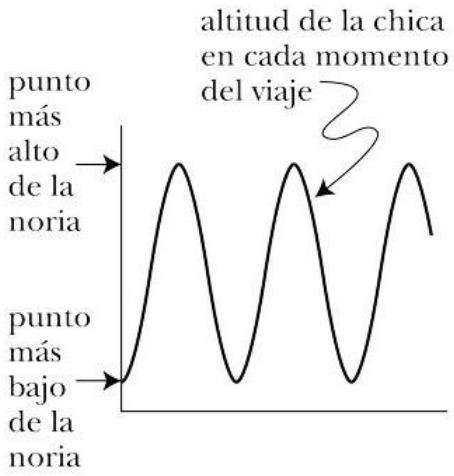
herramienta fundamental para cuantificar cómo se relacionan entre sí los lados y ángulos de un triángulo. Esta era la aplicación original de la trigonometría, de gran utilidad para astrónomos y topógrafos de la Antigüedad.

Pero la *tri*gonometría, desmintiendo su modesto nombre, trasciende hoy la medición de *tri*ángulos. Cuantificando también círculos, ha allanado el camino para el análisis de cualquier cosa que se repita, desde las olas del océano a las ondas cerebrales. Es la clave de la matemática cíclica.

Para ver cómo logra la trigonometría conectar círculos, triángulos y ondas, imagine una niña pequeña dando vueltas y vueltas en una noria.

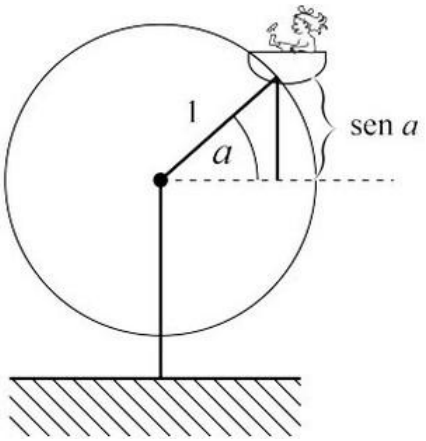


Su madre y ella, ambas con gusto por las matemáticas, han decidido que esta es la oportunidad perfecta para llevar a cabo un experimento. La niña sube a la noria con un dispositivo GPS para registrar su altitud, momento a momento, mientras la rueda la levanta hacia la cima, luego la baja hacia el suelo, luego hacia arriba de nuevo, y así sucesivamente. Los resultados son los siguientes.



Esta forma es una onda sinusoidal. Surge cuando se hace seguimiento de las excursiones horizontales o verticales de algo —o alguien— que se mueve en círculo.

¿Qué relación tiene esta onda con el seno del que se hablaba en clase de trigonometría? Bueno, supongamos que examinamos una instantánea de la niña. En el momento que se capta, ella está en un ángulo, llámelo *a*, relativo a la línea de puntos del diagrama.



Por conveniencia, supongamos que la hipotenusa del triángulo de la derecha —que es también el radio de la noria— mide 1 unidad. Entonces, sen *a* (pronunciado «seno de *a*») nos dice a qué altura está la niña. Es más, sen *a* se define como la altitud de la niña, medida desde el centro de la noria, cuando está en el ángulo *a*.

A medida que gire y gire, su ángulo *a* se incrementará progresivamente. Al final, superará los 90 grados. Llegados a ese punto, no podemos percibir *a* como un

ángulo dentro de un triángulo rectángulo. ¿Significa esto que la trigonometría ya no es aplicable?

No. Sin inmutarse, como de costumbre, los matemáticos simplemente agrandan la definición de la función seno para que admita *cualquier* ángulo —no solo aquellos inferiores a 90 grados— y más tarde definen «sen *a*» como la altura de la niña por encima o por debajo del centro del círculo. El gráfico correspondiente de sen *a*, a medida que *a* se sigue incrementando (o incluso se hace negativo si la noria cambia de sentido), es a lo que nos referimos con onda sinusoidal. Se repite cada vez que *a* cambia 360 grados, lo que corresponde a un giro completo.

Aunque pase desapercibido, este mismo tipo de conversión de movimiento circular en ondas sinusoidales es una parte omnipresente de nuestra experiencia diaria. Crea el zumbido de las luces fluorescentes en nuestras oficinas, un recordatorio de que en algún lugar de la red eléctrica los generadores están girando a sesenta ciclos por segundo, convirtiendo su movimiento rotatorio en corriente alterna: las ondas sinusoidales eléctricas de las que depende la vida moderna. Cuando usted habla y yo escucho, ambos cuerpos están usando ondas sinusoidales: las suyas en la vibración de sus cuerdas vocales para producir sonidos y las mías en el vaivén de las células ciliadas de los oídos para recibirlos. Si abrimos nuestros corazones a estas ondas sinusoidales y sintonizamos con su zumbido silencioso, tienen la capacidad de emocionarnos. Hay algo casi espiritual en ellas.

Cuando se toca la cuerda de una guitarra o cuando los niños saltan a la comba, la forma que aparece es una onda sinusoidal. Las ondas en un estanque, las crestas de las dunas de arena, las rayas de una cebra, son todas ellas manifestaciones del mecanismo más básico de formación de patrones[59] de la naturaleza: la aparición de una estructura sinusoidal de un fondo uniforme.

L. Clarke / Corbis

Corbis

Photodisc / Getty Images

Hay razones matemáticas profundas que lo explican. Cada vez que un estado de equilibrio sin rasgos distintivos pierde estabilidad —por la razón o por el proceso

físico, biológico o químico que sea— el patrón que primero aparece es la onda sinusoidal, o una combinación de ellas.

Las ondas sinusoidales son los átomos de la estructura. Son los pilares de la naturaleza. Sin ellas, no habría nada, dando un nuevo significado a la locución «*sine qua non*».

De hecho, las palabras son literalmente ciertas. La mecánica cuántica describe a los átomos reales, y por tanto a toda la materia, como paquetes de ondas sinusoidales. Incluso en la escala cosmológica, las ondas sinusoidales forman las semillas de todo lo que existe. Los astrónomos han investigado el espectro (el patrón de ondas sinusoidales) de los antecedentes de las microondas cósmicas[60] y han encontrado que sus medidas coinciden con las predicciones de la cosmología inflacionaria[61], la teoría más aceptada acerca del nacimiento y crecimiento del universo. Por lo tanto, parece que de un Big Bang sin atributos emergieron de manera espontánea ondas sinusoidales primordiales (ondulaciones en la densidad de la materia y la energía) que dieron lugar a la materia del cosmos.

Estrellas, galaxias y, finalmente, niñas que se montan en la noria.

§16. Llevar al límite

En secundaria, mis amigos y yo disfrutábamos desmenuzando los acertijos clásicos. ¿Qué sucede cuando una fuerza irresistible se topa con un objeto inmóvil? Fácil: ambos explotan. La filosofía es trivial cuando tienes trece años.

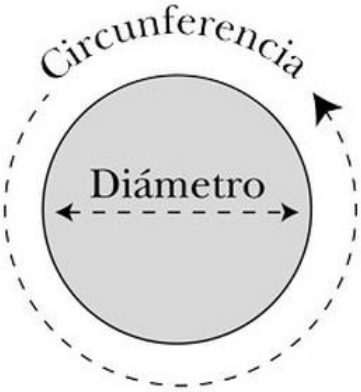
Pero uno de estos enigmas nos inquietaba. Si recorremos la distancia que nos separa de la pared por mitades, ¿lograremos llegar? Había algo profundamente frustrante en este acertijo: la sensación de estar acercándose poco a poco, pero no llegar nunca. (Probablemente esto albergue en alguna parte una metáfora acerca de la angustia adolescente). Otra preocupación era la presencia velada del infinito. Para alcanzar la pared, necesitarías dar un número infinito de pasos y, al final, se harían infinitesimalmente pequeños. ¡Vaya!

Estas cuestiones siempre han provocado dolores de cabeza. Sobre el 500 a. C., Zenón de Elea[62] propuso cuatro paradojas acerca del infinito que desconcertaron a sus contemporáneos y que son, en parte, culpables de que el infinito fuera desterrado de las matemáticas durante los siglos posteriores. En la geometría euclídea, las únicas construcciones permitidas eran aquellas que implicaban un número de pasos finitos. El infinito se consideraba demasiado inefable, demasiado inabarcable y demasiado difícil para hacerlo riguroso lógicamente.

Pero Arquímedes, el matemático más grande de la Antigüedad, descubrió el poder del infinito. Se aprovechó de él para resolver problemas de otro modo intratables y, en el proceso, casi inventa el cálculo unos 200 años antes que Newton y Leibniz.

En los capítulos siguientes, profundizaremos en las grandes ideas que se encuentran en el centro del cálculo. Pero, por ahora, me gustaría empezar con sus primeras bellas señales, visibles en antiguos cálculos sobre círculos y pi[63].

Recordemos a qué nos referimos con «pi». Es una relación de dos distancias. Una de ellas es el diámetro, la distancia *a través* del círculo cruzando su centro. La otra es la circunferencia, la distancia *alrededor* del círculo. «Pi» se define como su ratio, la circunferencia dividida por el diámetro.



Si es usted un pensador cauto, puede que ya haya algo que le preocupe. ¿Cómo sabemos que pi es el mismo número para todos los círculos? ¿Podría ser distinto para números grandes y pequeños? La respuesta es no, pero la demostración no es trivial. He aquí una respuesta intuitiva.

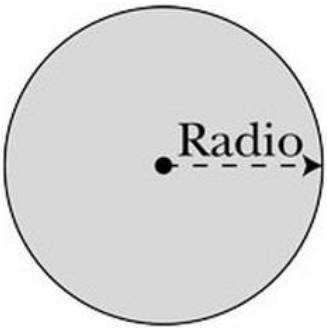
Imagine que está utilizando una fotocopiadora para reducir la imagen de un círculo, digamos, el 50 por ciento. En ese caso, *todas* las distancias del dibujo —incluyendo la circunferencia y el diámetro— se encogerían proporcionalmente un 50 por ciento. Así que, cuando dividiera la nueva circunferencia por el nuevo diámetro, ese 50 por ciento se igualaría, dejando inalterado el ratio entre ambos. Ese ratio es pi.

Por supuesto, esto no nos dice qué tamaño tiene pi. Experimentos sencillos con cuerdas y platos bastan para dar con un valor cercano al 3 o, si es usted más meticuloso, $^{31}/_{7}$. Pero supongamos que queremos encontrar pi, exactamente, o al menos de manera más aproximada. ¿Entonces qué? Este era un problema que confundía a los antiguos.

Antes de ocuparnos de la brillante solución de Arquímedes, deberíamos mencionar otro lugar en el que aparece pi en conexión con círculos. El área de un círculo (la cantidad de espacio dentro de él) viene dada por la fórmula

$$A = \pi r^2$$

Aquí, A es el área, π es la letra griega pi, y r es el radio del círculo, definido como medio diámetro.



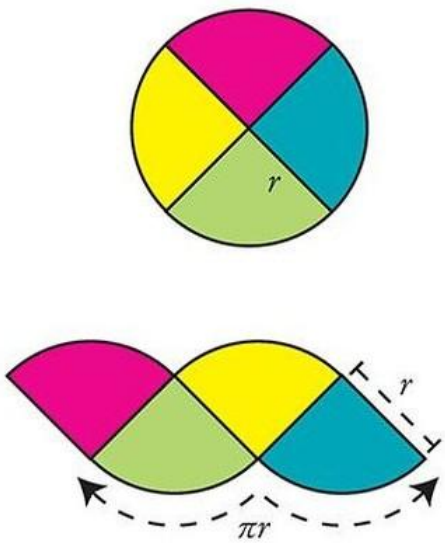
Todos memorizamos esta fórmula en bachillerato, pero ¿de dónde viene? No suele demostrarse en las clases de geometría. Si estudió cálculo, seguramente vio la demostración, pero ¿es necesario el cálculo para obtener algo tan básico?

Sí, lo es.

Lo que hace que el problema sea difícil es que los círculos son redondos. Si estuvieran hechos de líneas rectas, no habría problema alguno. Dar con el área de cuadrados y rectángulos es fácil, pero trabajar con formas curvas como los círculos es complicado.

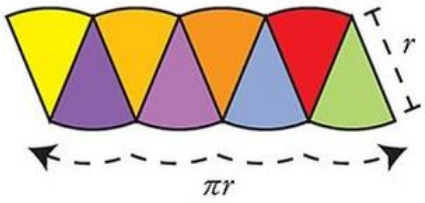
La clave para pensar matemáticamente acerca de las formas curvadas es imaginar que están hechas de varios trozos rectos. Algo que no es verdad, pero funciona… siempre y cuando se lleve al límite y se imaginen *infinitamente* muchos trozos, cada uno infinitesimalmente pequeño. Esa es la idea crucial de todo el cálculo.

Esta es una manera de hallar el área de un círculo. Comience dividiendo el área en cuatro cuartos iguales, y reorganícelos así:



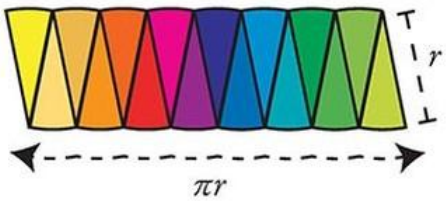
Esta extraña figura festoneada tiene la misma área que el círculo, aunque esto puede parecer poco informativo, puesto que tampoco conocemos el área del círculo. Pero, por lo menos, conocemos dos datos importantes. En primer lugar, los dos arcos en la parte inferior tienen una longitud combinada igual a la mitad de la circunferencia del círculo original (porque la otra mitad de la circunferencia se explica por los dos arcos en la parte superior). Puesto que la circunferencia entera es pi por el diámetro, la mitad sería pi por *medio* diámetro o, lo que es lo mismo, pi por el radio, r. Por eso el diagrama anterior muestra πr como la longitud combinada de los arcos inferiores de la figura festonada. Segundo, los lados rectos de los trozos tienen una longitud de r, ya que cada uno de ellos era, originalmente, un radio del círculo.

A continuación, repita el proceso, pero esta vez con ocho trozos, apilados como antes, alternativamente.

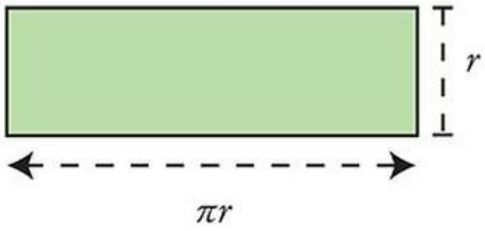


La figura festonada parece ahora menos extraña. Los arcos de la parte superior e inferior siguen ahí, pero no son tan pronunciados. Otra mejora es que los lados derecho e izquierdo de la figura festonada no están tan inclinados como antes. A pesar de estos cambios, los dos hechos anteriores aún se mantienen: los arcos de la parte inferior siguen teniendo una medida neta de πr y cada lado sigue midiendo r. Y, por supuesto, la figura festoneada tiene la misma área que antes —el área del círculo que buscamos—, ya que es simplemente una reordenación de los ocho trozos del círculo.

A medida que tomamos más y más trozos, sucede algo maravilloso: la forma festoneada se acerca a un rectángulo. Los arcos se hacen más planos y los lados se hacen casi verticales.



En el límite de *infinitamente* muchos trozos, la forma *es* un rectángulo. Como antes, los dos hechos se mantienen, lo que significa que este rectángulo tiene una anchura inferior de πr y un lado de altura r.

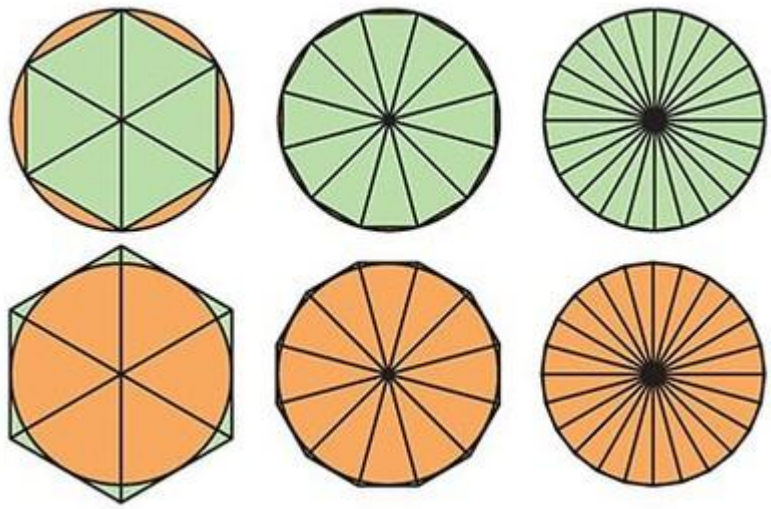


Pero ahora el problema es sencillo. El área del rectángulo es igual a su anchura por su altura, así que multiplicando πr por r obtenemos un área de πr^2 para el rectángulo. Y como la figura reordenada siempre tiene la misma área que el círculo, ¡esta es también la respuesta para el círculo!

Lo que resulta fascinante de este cálculo es la manera en que el infinito llega al rescate. En cada fase finita, la figura festoneada parece extraña y poco prometedora. Pero cuando la llevas al límite —cuando logras llegar a la pared—, se hace simple y bella, y todo se esclarece. Así es como funciona el cálculo en su mejor momento.

Arquímedes utilizó una estrategia similar para aproximarse a pi[64]. Reemplazó un círculo por un polígono con muchos lados rectos y siguió doblando el número de lados para acercarse a la redondez perfecta. Pero, en lugar de conformarse con una

aproximación de exactitud incierta, metódicamente acotó pi intercalando el círculo entre polígonos inscritos y circunscritos, como se muestra a continuación para figuras de 6, 12 y 24 lados.



Luego utilizó el teorema de Pitágoras para descifrar el perímetro de los polígonos interiores y exteriores, comenzando con el hexágono y subiendo hacia 12, 24, 48 y, finalmente, 96 lados. El resultado de los 96-ágonos le permitió demostrar que

$$3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$$

En notación decimal (de la que no disponía Arquímedes), esto significa que pi está entre 3,1408 y 3,1429.

Esta aproximación se conoce como el «método exhaustivo», o «método por agotamiento»[65], por la manera en que atrapa al desconocido número pi entre dos números conocidos que le aprietan por los lados. Los límites se estrechan con cada duplicación, agotando el margen de maniobra de pi.

En el límite de infinitamente muchos lados, tanto los límites superiores como inferiores convergerían a pi. Desgraciadamente, este límite no es tan sencillo como el anterior, donde la forma festoneada se convertía en rectángulo. Así que pi se mantiene tan evasivo como siempre[66]. Podemos descubrir más y más de sus dígitos —el récord actual supera los 2,7 billones de decimales—, pero nunca lograremos conocerlo del todo.

Además de sembrar el terreno del cálculo, Arquímedes nos enseñó el poder de la aproximación y la iteración. Mejoró una estimación empleando más y más trozos rectos para aproximarse a un objeto curvo con creciente precisión.

Más de dos mil años después, esta estrategia maduró hasta convertirse en el moderno campo de análisis numérico[67]. Cuando los ingenieros utilizan ordenadores para diseñar coches óptimamente aerodinámicos, o cuando los biofísicos simulan cómo un nuevo fármaco quimioterapéutico combate las células cancerígenas, están empleando análisis numérico.

Los matemáticos e informáticos que inauguraron este campo han creado algoritmos repetitivos muy eficientes, que funcionan al ritmo de mil millones de veces por segundo y permiten que las computadoras resuelvan problemas de cualquier campo de la vida moderna, desde la biotecnología a Wall Street o Internet. En cada caso, la estrategia es encontrar una serie de aproximaciones que converjan en la respuesta correcta como límite.

Y no hay límite allá donde nos lleva.

Cuarta Parte
Cambio

Contenido:

§17. Cambio en el que podemos confiar
§18. Se trocea, se rebana
§19. e al desnudo
§20. Me quiere, no me quiere
§21. Salir a la luz

§17. Cambio en el que podemos confiar

Mucho antes de saber lo que era el cálculo, intuí que tenía algo especial. Mi padre hablaba del cálculo en un tono reverencial. Él no había podido ir a la universidad, era un niño de la Depresión, pero en algún momento, quizá durante su estancia en el Pacífico Sur reparando motores de los bombarderos B-24, se había percatado de las posibilidades del cálculo. Imagine un grupo controlado de armamento antiaéreo, disparando automáticamente contra un caza enemigo. El cálculo, supuso mi padre, podría utilizarse para decirle a las armas dónde apuntar.

Aproximadamente un millón de alumnos estadounidenses cursan cálculo cada año[68]. Pero son pocos los que verdaderamente comprenden de qué trata la asignatura, o los que podrían decir por qué razón la aprenden. No es su culpa. Son tantas las técnicas que dominar y tantas las nuevas ideas que absorber, que es fácil perderse el marco general.

El cálculo es la matemática del cambio. Lo describe todo, desde la propagación de epidemias a los zigzags de una bola de béisbol bien tirada. La materia es gigantesca…, también lo son los manuales. Muchos exceden las mil páginas y cumplen bien como sujetapuertas.

Pero entre toda esa mole, brillan dos ideas. El resto, como dijo el rabino Hilel de la regla de oro, son solo comentarios. Esas dos ideas son la derivada y la integral. Cada una domina su propia mitad de la asignatura: cálculo diferencial y cálculo integral.

A grandes rasgos, la derivada nos dice a qué velocidad está cambiando algo; la integral dice cuánto está acumulando. Nacieron en tiempos y lugares diferentes: las integrales en Grecia, en torno al 250 a. C.; las derivadas en Inglaterra y Alemania a mediados del siglo XVII. Sin embargo, en un giro propio de una novela de

Dickens, han resultado ser parientes de sangre, aunque se tardó cerca de dos milenios en percibir el parecido familiar.

El siguiente capítulo explorará esa asombrosa conexión, así como el significado de las integrales. Pero primero, para sentar las bases, veamos las derivadas.

Las derivadas están a nuestro alrededor, aunque no las reconozcamos. Por ejemplo, la pendiente de una rampa es una derivada. Como todas las derivadas, mide una tasa de cambio; en este caso, cuánto sube o baja a cada paso que da. Una rampa muy empinada tiene una gran derivada. Un rampa de acceso para sillas de ruedas, con su suave pendiente, tiene una derivada pequeña.

Cada campo tiene su propia versión de derivada. Vaya por retorno marginal, tasa de crecimiento, velocidad o pendiente, una derivada que responda a cualquier otro nombre huele igual de dulce. Desgraciadamente, muchos alumnos salen de la asignatura de cálculo con una idea bastante más limitada, viendo las derivadas como sinónimos de pendientes de una curva.

Su confusión es comprensible. La provoca nuestra dependencia de los gráficos para expresar relaciones cuantitativas. Al trazar y en función de x para visualizar cómo una variable afecta a la otra, todos los científicos traducen sus problemas al lenguaje común de las matemáticas. La tasa de cambio que realmente les preocupa —una tasa de crecimiento viral, la velocidad de un jet o lo que sea— se convierte entonces en algo mucho más abstracto pero más sencillo de imaginar: una pendiente en un gráfico.

Al igual que las pendientes, las derivadas pueden ser positivas, negativas o cero, en función de si algo está subiendo, bajando o estabilizándose. Imagine a Michael Jordan volando por los aires antes de uno de sus estruendosos mates[69].

Manny Millan / Getty Images

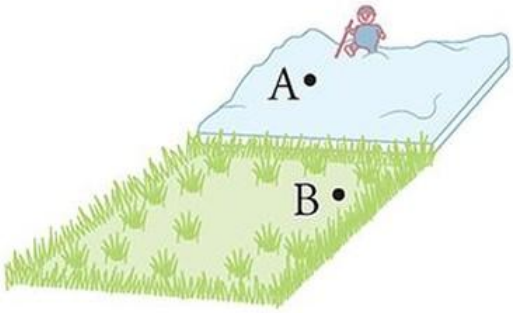
Justo después del despegue, su velocidad vertical (la media a la que cambia su elevación en el tiempo y, por lo tanto, otra derivada) es positiva, porque está subiendo. Su elevación incrementa. Al bajar, su derivada es negativa. Y en el punto más alto del salto, cuando parece estar colgado en el aire, su elevación, momentáneamente, no cambia, y su derivada es cero. En ese sentido, verdaderamente *está* colgando.

En este caso entra en juego un principio más general: las cosas siempre cambian más despacio arriba y abajo. Se nota especialmente aquí, en Ithaca. Durante las oscuras profundidades del invierno, los días no solo son despiadadamente cortos, sino que apenas mejoran de uno a otro, mientras que en primavera los días se alargan rápidamente. Todo esto tiene sentido. El cambio es más lento en los extremos, precisamente porque la derivada es cero. Las cosas, momentáneamente, están quietas.

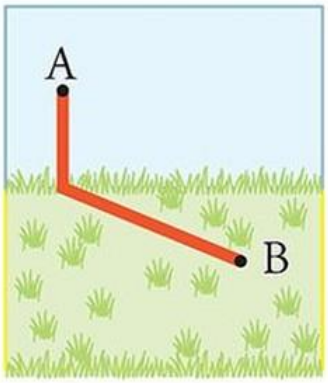
Esta propiedad de la derivada cero de los picos y valles subraya alguna de las aplicaciones más prácticas del cálculo. Nos permite utilizar derivadas para descubrir en qué punto alcanza una función su máximo o mínimo, un tema que

surge cada vez que buscamos la manera mejor, más barata o más rápida de hacer algo.

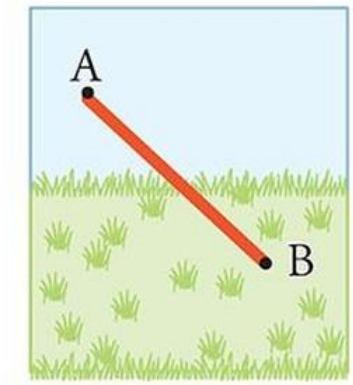
Mi profesor de cálculo en el instituto, el señor Joffray[70], tenía un don para que cobraran vida esas cuestiones de máximos y mínimos. Un día llegó corriendo a clase y nos contó su caminata por un campo cubierto de nieve. Al parecer, el viento había esparcido mucha nieve por una parte importante del terreno, cubriéndola significativamente, lo cual le obligó a caminar a un ritmo más lento por esa parte. El resto del terreno estaba despejado, lo que le permitió atravesarlo fácilmente. Se preguntó qué camino debería tomar un senderista para ir lo más rápido posible desde el punto A al B en una situación como esta.



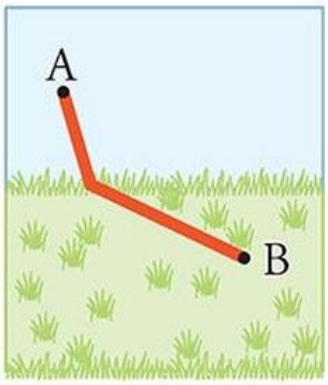
Una idea sería caminar recto a través de la nieve para acortar la parte más lenta de la caminata. El inconveniente es que el resto del viaje sería más largo de como habría sido de otra manera.



Otra estrategia es dirigirse en línea recta de A a B. Esa es ciertamente la distancia más corta, pero se tardaría más en la parte más ardua del viaje.

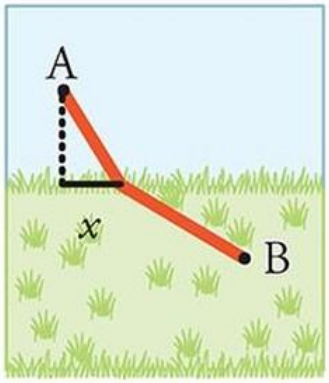


Mediante el cálculo diferencial se puede hallar el mejor camino. Es una solución intermedia específica entre las dos trayectorias consideradas anteriormente.



El análisis implica cuatro pasos principales.

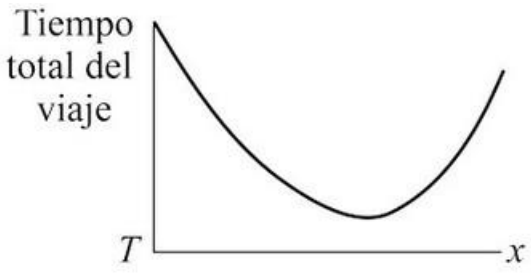
En primer lugar, observemos que el tiempo total de viaje —que es lo que tratamos de minimizar— depende del punto en el que el senderista salga de la nieve. Podría salir en cualquier lugar, así que consideremos todas las salidas posibles como una variable. Cada uno de estos lugares puede caracterizarse sucintamente especificando un único número: la distancia x en la que el senderista sale de la nieve.



(Implícitamente, la duración del viaje depende también de la localización de A y B y de la velocidad del senderista en ambos terrenos, pero esos parámetros vienen dados. Lo único que está bajo control del senderista es *x*).

En segundo lugar, dada una posibilidad de *x* y la localización del punto de partida A y el punto de destino B, podemos calcular cuánto tiempo invierte el senderista en caminar a través de las partes lenta y rápida del terreno. Para cada etapa del viaje, este cálculo requiere el teorema de Pitágoras y el viejo mantra del álgebra: «Distancia igual a velocidad multiplicada por tiempo». Sumando los tiempos de ambas etapas se produce una fórmula para el total del tiempo, *T*, como función de *x*.

En tercer lugar, trazamos *T* en función de *x*. La parte inferior de la curva es el punto que buscamos: corresponde al menor tiempo de viaje y, por tanto, a la opción más rápida.



Cuarto. Para dar con el punto más bajo, invocamos el principio de la derivada cero mencionado anteriormente. Calculamos la derivada de *T*, la igualamos a cero, y resolvemos la *x*.

Estos cuatro pasos requieren el dominio de la geometría, el álgebra y varias fórmulas derivativas de cálculo, habilidades equivalentes a la fluidez en una lengua extranjera y, por lo tanto, escollos para muchos estudiantes.

Pero la respuesta final merece el esfuerzo. Revela que el camino más rápido obedece a una relación conocida como la ley de Snell. Lo que asusta es que la naturaleza también la obedece.

La ley de Snell[71] describe cómo se doblan los rayos de luz cuando pasan del aire al agua, como sucede cuando el sol se refleja en una piscina. La luz se mueve más despacio en el agua, como el senderista en la nieve, y se dobla para minimizar la duración de su viaje. Igualmente, la luz se dobla cuando viaja del aire al cristal o al plástico, como cuando se refracta a través de sus gafas.

Lo misterioso es que la luz se comporta como si tuviera en cuenta todos los caminos posibles[72] y se decidiera por el mejor. La naturaleza —dando pie al tema de la serie televisiva *En los límites de la realidad*—, de alguna manera, sabe cálculo.

§18. Se trocea, se rebana

Los signos y símbolos matemáticos son a menudo crípticos, pero la mayoría de ellos dan pistas visuales de su significado. Los símbolos para el cero, el uno y el infinito logran asemejarse a un agujero vacío, una marca única y un bucle sin fin: 0, 1, ∞. Y el signo igual, =, se forma con dos líneas paralelas porque, como escribió su creador —el matemático galés Robert Recorde— en 1557, «no hay dos cosas más iguales».

El signo más reconocible del cálculo es el de la integral:

$$\int$$

Sus elegantes líneas evocan una clave musical o los agujeros en f de un violín, una coincidencia acertada, puesto que algunas de las armonías con más encanto de la matemática se expresan mediante integrales. Pero la razón principal por la que el matemático Gottfried Leibniz eligió este símbolo es mucho menos poética. Es simplemente una *S* de cuello largo (*s*, de suma).

Lo que se está sumando depende del contexto. En astronomía, la atracción gravitatoria del Sol sobre la Tierra se describe mediante una integral. Representa el efecto colectivo de todas las fuerzas minúsculas generadas por cada átomo solar a

distancias variables de la Tierra. En oncología[73], la creciente masa de un tumor puede ser modelada por una integral. También puede serlo la cantidad de fármaco administrado durante una sesión de quimioterapia.

Para entender por qué sumas de este tipo requieren cálculo integral y no el tipo de suma convencional que aprendimos en primaria, veamos a qué tipo de retos nos enfrentamos al tratar de calcular la atracción gravitatoria del Sol sobre la Tierra. La primera dificultad es que el Sol no es un punto… y tampoco lo es la Tierra. Ambos son bolas gigantescas hechas de un número formidable de átomos. Cada átomo del Sol ejerce una atracción gravitatoria sobre cada átomo de la Tierra. Evidentemente, puesto que los átomos son muy pequeños, sus atracciones mutuas son casi infinitesimalmente pequeñas, pero como hay casi infinitos átomos, en conjunto pueden llegar a ser algo. De alguna manera, tenemos que sumarlos.

Pero existe una segunda dificultad más seria: esa atracción difiere entre parejas de átomos. Algunas son más fuertes que otras. ¿Por qué? Porque la fuerza de la gravedad *cambia* con la distancia: cuanto más cerca están dos objetos, con más fuerza se atraen. Los átomos de los lados más alejados del Sol y la Tierra son los que sienten la menor atracción; los de los lados más próximos sienten la atracción más fuerte; y los que están en medio sienten atracciones de fuerza media. El cálculo integral es necesario para sumar todas esas fuerzas cambiantes. Sorprendentemente, puede hacerse, al menos en el límite idealizado donde tratamos a la Tierra y al Sol como esferas sólidas compuestas de *infinitos* puntos de la materia continua, cada uno ejerciendo una atracción infinitesimal sobre los demás. Como siempre en cálculo: ¡infinito y límites al rescate!

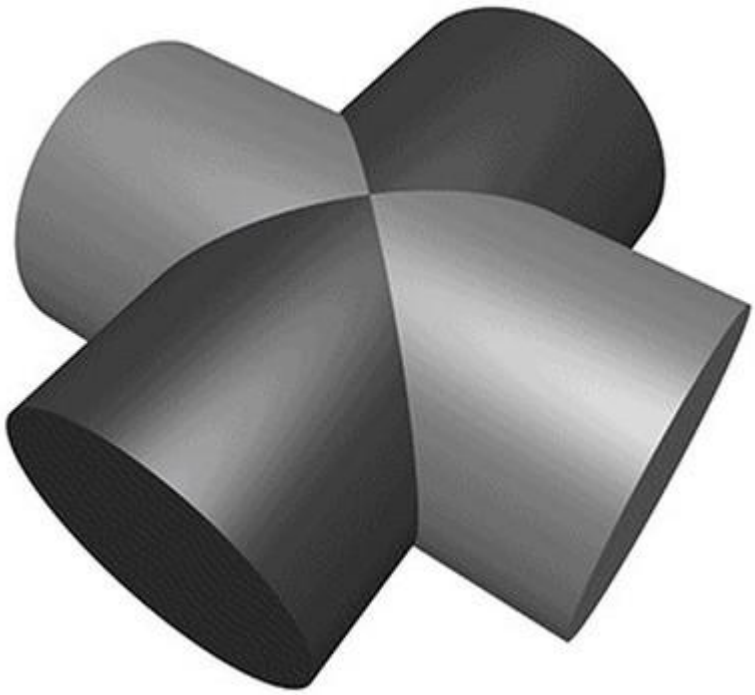
Históricamente, las integrales surgieron primero en geometría, en conexión con el problema de hallar las áreas de superficies curvas. Como vimos en el capítulo 16, el área de un círculo puede verse como la suma de muchos trozos de tarta finos. En el límite de infinitos trozos, cada uno de ellos infinitesimalmente fino, esos trozos podrían ser astutamente reorganizados para formar un rectángulo cuya área resultara mucho más sencilla de encontrar. Ese era el típico uso de las integrales. Consisten en tomar algo complicado y trocearlo para que resulte más sencillo sumarlo.

En una generalización 3-D de este método, Arquímedes (y Eudoxo antes que él, en torno al 400 a. C.) calculó los volúmenes de varias formas sólidas imaginándolas como pilas de obleas o discos, como salami cortado fino. Mediante el cálculo de los

volúmenes cambiantes de los distintos trozos e integrándolos ingeniosamente —sumándolos de nuevo—, pudo deducir el volumen del total original.

Hoy todavía pedimos a matemáticos y científicos en ciernes que afilen sus habilidades de integración aplicándolas a este tipo de problemas de geometría clásica. Son de los ejercicios más difíciles que mandamos, y muchos alumnos los odian, pero no hay modo más seguro de perfeccionar la familiaridad con las integrales que exige toda disciplina cuantitativa, desde la física a las finanzas.

Uno de estos alucinantes casos se refiere al volumen del sólido común a dos cilindros idénticos[74] que se cruzan en ángulos rectos, como las tuberías de la cocina.



Paul Bourke

Visualizar esta forma tridimensional requiere un don imaginativo poco común, así que no hay que avergonzarse por admitir la derrota y buscar una manera de hacerlo más palpable. Para ello, se puede recurrir a un truco que solía utilizar mi profesor de cálculo del instituto. Coja una lata de aluminio y corte la parte superior con unas cizallas para formar una herramienta de hacer cilindros. Ahora úsela presionando sobre una patata grande o un trozo de espuma de poliestireno desde dos direcciones perpendiculares entre sí. Inspeccione la forma resultante en cuanto tenga tiempo.

La infografía[75] permite que ahora podamos visualizar esta forma más fácilmente.

Paul Bourke

Sorprendentemente, la figura tiene secciones transversales cuadradas, aunque fuera creada a partir de cilindros redondos.

Paul Bourke

Es una pila de capas infinitas, cada una un finísimo cuadrado, que disminuyen, a partir de un gran cuadrado en el centro, a otros cada vez más pequeños y finalmente a los puntos de la parte superior e inferior.

De todos modos, imaginar la figura es solo el primer paso. Aún queda determinar su volumen, mediante el cómputo de los volúmenes de todos los segmentos separados. Arquímedes logró hacerlo[76], pero solo en virtud de su asombrosa ingenuidad. Utilizó un método mecánico basado en palancas y centros de gravedad, prácticamente pesando la figura en su mente, midiéndola frente a otras que ya comprendía. La parte mala de esta aproximación, aparte de la exclusiva brillantez que exige, es que solo era aplicable a unas cuantas formas.

Obstáculos conceptuales como este dejaron perplejos a los mejores matemáticos durante los diecinueve siglos siguientes, hasta que a mediados del siglo XVII James Gregory, Isaac Barrow, Isaac Newton y Gottfried Leibniz establecieron lo que hoy se conoce como teorema fundamental del cálculo. Forjó una poderosa unión entre dos tipos de cambio que se estudian en cálculo: el cambio cumulativo, representado por las integrales, y la tasa local de cambio, representada por las derivadas (el tema del capítulo 17). Exponiendo esta conexión, el teorema fundamental expandió el universo de las integrales que podían resolverse y redujo su cálculo a trabajo pesado. Hoy en día, se pueden programar los ordenadores para que lo utilicen…, y también a los alumnos. Con la ayuda del teorema, hasta el problema de los tubos, que en su día fue un reto mundial, se convierte en un ejercicio al alcance de todos. (Para más detalles sobre el enfoque de Arquímedes, así como el actual, consulte las referencias de las notas en el apartado Notas).

Antes de que el cálculo y el teorema fundamental aparecieran, solo las formas más simples de cambio podían analizarse. Cuando algo cambia de manera *estable*, a un ritmo constante, el álgebra funciona maravillosamente. Esta es la propiedad de «distancia igual a velocidad por tiempo». Por ejemplo, un coche que circula a una velocidad estable recorrerá 60 millas en la primera hora y 120 millas al final de la segunda hora.

Pero ¿qué hay del cambio que progresa a un ritmo *cambiante?* Ese cambio cambiante está en todas partes a nuestro alrededor: en el descenso acelerado de una moneda lanzada desde un edificio alto, en el ir y venir de las mareas, en las órbitas elípticas de los planetas, en nuestros ritmos circadianos. Solo el cálculo puede hacer frente a los efectos acumulativos de cambios tan poco uniformes como estos.

Casi dos milenios después de Arquímedes, solo existía un método para predecir el efecto neto del cambio cambiante: sumar los distintos trozos, uno a uno. El ritmo de cambio debía tratarse como una constante en cada trozo, luego invocar el análogo de «distancia igual a velocidad por tiempo», llegar al final de ese trozo y repetir hasta haber terminado con todos los trozos. La mayor parte de las veces no podía hacerse. Las sumas infinitas eran demasiado complicadas.

El teorema fundamental permitía que muchos de estos problemas se resolvieran —no todos, pero muchos más que antes—. Solía ser un atajo para resolver integrales, por lo menos para las funciones elementales (las sumas y productos de potencias, exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas) que describían muchos de los fenómenos del mundo natural.

He aquí una analogía que espero que arroje un poco de luz sobre lo que dice el teorema fundamental y por qué es tan útil (la sugirió Charlie Peskin, colega de la Universidad de Nueva York). Imagine una escalera. El cambio total de altura, desde arriba hasta abajo, es la suma de la altura de los escalones. Esto es cierto, independientemente de que algunos escalones sean más altos que otros o cuántos escalones haya.

El teorema fundamental del cálculo dice algo parecido para las funciones: si integra la derivada de una función de un punto a otro, obtendrá el cambio neto en la función entre los dos puntos. En esta analogía, la función es como la elevación de cada escalón comparada con el nivel del suelo. Las subidas de cada escalón individual son como la derivada. Integrar la derivada es como sumar las alturas. Y los dos puntos son la parte superior y la parte inferior.

¿Por qué es tan útil el teorema? Suponga que le entregan una lista enorme de números para sumar, como ocurre cuando calcula una integral por partes. Si de alguna manera logra encontrar la escalera correspondiente —en otras palabras, si logra encontrar una función de elevación para la que esos números sean las subidas—, entonces calcular la integral es sencillo. Es la parte superior menos la parte inferior.

El teorema fundamental hace posible este atajo. Y es por lo que torturamos a todos los alumnos primerizos de cálculo durante meses, tratando de que aprendan a encontrar funciones de elevación, técnicamente llamadas antiderivadas o integrales indefinidas. Este avance permitió a los matemáticos pronosticar acontecimientos en un mundo cambiante con mucha mayor precisión de la que nunca había sido posible.

Desde esta perspectiva, el legado perdurable del cálculo integral es una vista *thermomix* del universo. Newton y sus sucesores descubrieron que la naturaleza misma se desdobla en trozos. Prácticamente, todas las leyes de la física halladas en los últimos 300 años resultaron tener este carácter, ya sea que describan el movimiento de partículas, el flujo de calor, electricidad, aire o agua. Junto con las leyes que rigen, las condiciones en cada trozo de tiempo o espacio determinarán qué sucede en trozos adyacentes.

Las implicaciones eran profundas. Por primera vez en la historia, la predicción racional era posible… no solo trozo a trozo, sino, con la ayuda del teorema fundamental, a pasos agigantados.

Así que estamos tardando en actualizar nuestro eslogan para integrales: de «Se trocea, se rebana» a «Recalculando. Una ruta mejor es posible».

§19. «*e*» al desnudo

Algunos números son celebridades de tal calibre que tienen nombres artísticos de una sola letra, algo a lo que no llegan Madonna o Prince. El más famoso es π, el número anteriormente conocido como 3,14159…

Cerca está *i*, el número del álgebra, el número imaginario, tan radical que cambió lo que significaba ser un número. ¿El siguiente de la lista?

Saluden a *e*. Así apodado por su papel estelar en el crecimiento exponencial, *e* es ahora el Zelig de la matemática avanzada. Surge de cualquier parte, se asoma desde las esquinas del escenario, haciéndonos reír con su presencia en lugares incongruentes. Por ejemplo, junto con los puntos de vista que ofrece sobre las reacciones en cadena y los *booms* poblacionales, *e* tiene también algo que decir acerca de con cuántas personas se debe salir antes de sentar la cabeza.

Pero antes de entrar en eso, ¿qué es, exactamente, e^{77}? Su valor numérico es 2,71828…, pero eso no resulta demasiado esclarecedor. Podría decirle que *e* es igual al número limitante al que se acerca la suma

$$1 + 1/1 + 1/1 \times 2 + 1/1 \times 2 \times 3 + 1/1 \times 2 \times 3 \times 4 + \ldots$$

a medida que vamos añadiendo términos. Pero esto tampoco ayuda demasiado. En lugar de esto, veamos a *e* en acción.

Imagine que ha depositado 100 dólares en una cuenta de ahorro en un banco que le paga un generoso interés del 100 por ciento anual. El año siguiente, en su cuenta

tendría 200 dólares, el depósito inicial de 100 dólares más el 100 por ciento de interés, es decir, otros 100 dólares.

Puesto que reconoce a un tonto a primera vista, le pide al banco términos incluso más favorables: ¿qué les parecería ofrecer el interés semestralmente? Es decir, pagarían solo el 50 por ciento del interés los primeros seis meses y el 50 por ciento restante los siguientes seis. A usted le resultaría mucho más favorable (puesto que cobraría intereses de los intereses), pero ¿cuánto más favorable?

La respuesta es que su suma inicial de 100 crecería en un factor de 1,50 en el primer semestre del año y de nuevo en un factor de 1,50 en el segundo semestre. Y puesto que 1,50 por 1,50 es 2,25, después de un año, su dinero ascendería a 2250 dólares, mucho más que los 200 dólares que recibió de la oferta original.

Pero ¿y si insistiera aún más y convenciera al banco de que dividiera el año en periodos más y más cortos —diario, por segundo, incluso por nanosegundo—? ¿Haría una pequeña fortuna?

Para hacer que los números salgan bien, aquí está el resultado correspondiente a un año dividido en 100 periodos iguales, por los que cobraría un interés del 1 por ciento (la tasa de 100 por ciento anual, dividida uniformemente en 100 cuotas): su dinero crecería en un factor de 1,01 elevado a la potencia 100.ª, lo que equivale aproximadamente a 2,70481. En otras palabras, en lugar de 200 o 2250 dólares, tendría 2704,81.

Finalmente, si el interés se capitalizase con frecuencia *infinita* —esto se llama capitalización continua— su total tras un año sería algo más grande, pero no demasiado: 2718,28 dólares. La respuesta correcta es 100 dólares por *e*, cuando *e* se define como el número limitante que resulta de este proceso:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$$

Este es un argumento del cálculo por antonomasia. Como vimos en los últimos capítulos en los que calculamos el área de un círculo o ponderamos la atracción gravitatoria del Sol sobre la Tierra, lo que distingue al cálculo de partes anteriores de las matemáticas es su voluntad de confrontar —y aprovechar— el inmenso poder del infinito. Ya estemos fijándonos en límites, derivadas o integrales, siempre tenemos que acercarnos sigilosamente al infinito de una u otra manera.

En el proceso limitante que ha dado lugar a *e*, imaginamos la partición de un año en más y más periodos de capitalización, ventanas de tiempo que se hacían cada vez más y más pequeñas, aproximándose cada vez más a lo que solo puede describirse como cantidad infinita, ventanas infinitesimalmente estrechas. Esto puede sonar paradójico, pero no es peor que tratar a un círculo como el límite de un polígono regular con más y más lados, cada uno de los cuales se hace más y más pequeño. Lo fascinante es que cuanto más frecuentemente se capitaliza el interés, menos crece el dinero durante cada periodo. Sin embargo, todavía asciende a algo sustancial después de un año, ¡porque se ha multiplicado durante muchos periodos!

Esta es una pista acerca de la ubicuidad de *e*. Suele mostrarse cuando algo cambia por el efecto acumulativo de pequeños acontecimientos.

Considere un pedazo de uranio experimentando desintegración radiactiva. Momento a momento, cada átomo tiene cierta posibilidad de desintegrarse. Si finalmente lo hace, y cuándo, es completamente impredecible, y cada suceso tiene un efecto infinitesimal en el total. Sin embargo, en conjunto, estos billones de sucesos, de manera suave y previsible, producen un decremento exponencial del nivel de radiactividad.

O piense en la población mundial, que crece aproximadamente de manera exponencial. En todo el mundo, los niños nacen en momentos y lugares aleatorios, mientras que otras personas mueren, también en momentos y lugares aleatorios. Cada suceso tiene un impacto minúsculo, porcentualmente hablando, en la población total del mundo. Sin embargo, la población total crece exponencialmente a una tasa muy predecible.

Otra receta para *e* combina el azar con un gran número de elecciones. Permítame darle dos ejemplos inspirados en el día a día, aunque bastante estilizados.

Imagine que en el cine local proyectan una nueva película muy popular. Es una comedia romántica y cientos de parejas (muchas más de las que el cine puede acomodar) hacen cola frente a la taquilla, desesperadas por entrar. Cuando una pareja consigue sus entradas, entra y se pelea por encontrar dos butacas juntas. Para simplificar las cosas, supongamos que eligen estos asientos al azar, donde haya sitio. En otras palabras, no les importa sentarse cerca o lejos de la pantalla, en el pasillo, o en mitad de una fila. Mientras estén juntos, están felices.

Asumamos también que ninguna pareja se moverá para dejar sitio a otra. Una vez sentada una pareja, se acabó. No habrá cortesía alguna. Conscientes de esto, la

taquilla deja de vender entradas en cuanto quedan, únicamente, butacas sueltas; de lo contrario, podría haber peleas.

Al principio, cuando el cine está casi vacío, no hay problema. Toda pareja puede encontrar dos sitios juntos. Pero después, solo quedan butacas sueltas —solitarias, espacios inhabitables, muertos, que una pareja no puede usar—. En la vida real, la gente genera estos parachoques a propósito, ya sea para dejar sus abrigos o para evitar compartir reposabrazos con un extraño repulsivo. En este modelo, no obstante, estos espacios muertos se dan por azar.

La pregunta es: cuando no queda sitio para más parejas, ¿qué fracción de los asientos del cine está desocupada?

La respuesta, en caso de tratarse de un cine con muchas butacas por fila, se aproxima a

$$\frac{1}{e^2} = 0{,}135\ldots$$

Por tanto, cerca del 13,5 por ciento de las butacas se desperdician[78].

Aunque los detalles del cálculo son demasiado complejos para mostrarlos aquí, es sencillo ver que 13,5 por ciento entra dentro de lo razonable cuando lo comparamos con dos casos extremos. Si las parejas se sentaran unas junto a otras, enlatadas con perfecta eficiencia como las sardinas, no sobrarían sitios.

J. R. Eyerman / Getty Images

Sin embargo, si se posicionaran de la manera más *ineficiente* posible, siempre con una butaca vacía entre ellas (y dejando un sitio de pasillo a un lado u otro de la fila, como muestra el diagrama siguiente), un tercio de los asientos no se usaría, porque cada pareja ocupa tres asientos: dos para ellos y otro para el espacio muerto.

Adivinando que el caso aleatorio caería en algún punto entre la eficiencia perfecta y la perfecta ineficiencia, y tomando la media de 0 y $1/3$, esperaríamos que cerca de $1/6$, o el 16,7 por ciento, de los asientos no se usasen. Así que no estamos demasiado lejos de la respuesta exacta, 13,5 por ciento.

Aquí, el alto número de opciones se da por las muchas formas en que pueden estar dispuestas las parejas en una sala de cine grande. Nuestro ejemplo final también tiene que ver con organizar parejas, pero esta vez en el tiempo, no en el espacio. A lo que me refiero es al molesto problema de con cuántas personas hay que salir antes de elegir compañero o compañera[79]. La versión de la vida real es demasiado complicada para las matemáticas, así que tomaremos un modelo simplificado. A pesar de las suposiciones irreales, logra capturar alguna de las desgarradoras incertidumbres del amor.

Supongamos que sabe cuántas compañeras potenciales va a conocer durante su vida. (El número real no es importante mientras sepamos de antemano que no es demasiado pequeño).

Asumamos también que es posible clasificar a estas personas inequívocamente, si pudiera verlas a todas a la vez (lo trágico, por supuesto, es que no puede). Las conoce al mismo tiempo, en un orden aleatorio. De tal manera que no puede saber si Don o Doña Perfecta —que estaría el número 1 en su lista— es alguien a quien ya ha conocido y de quien se ha separado, o si está a la vuelta de la esquina.

Y este juego funciona así: una vez que deja marchar a alguien, se ha ido. No hay una segunda oportunidad.

Finalmente, asuma que no quiere sentar la cabeza. Si termina con Segunda Mejor, o con cualquier otra que, en retrospectiva, no habría ocupado el primer puesto de la lista, considerará su vida amorosa un fracaso.

¿Hay esperanzas de elegir a su único y verdadero amor? Si es así, ¿qué puede hacer para tener las mejores probabilidades?

Una buena estrategia, aunque no la mejor, es dividir su vida amorosa en dos mitades iguales. En la primera de ellas, usted se mueve sin compromiso; en la segunda, está dispuesto a ponerse serio y a agarrar a la primera persona que conozca que sea mejor que aquellas con las que ha salido hasta ahora.

Con esta estrategia existe, por lo menos, una probabilidad del 25 por ciento de enganchar a Doña Perfecta. He aquí el porqué: tiene una probabilidad del 50 por ciento de conocer a Doña Perfecta en la segunda mitad de su vida amorosa, su fase «seria», y otro 50 por ciento de probabilidad de conocer a Segunda Mejor en la

primera mitad, mientras se movía sin compromiso. Si ambos casos se dan —y existe una probabilidad del 25 por ciento de que así sea—, usted terminará junto a su único y verdadero amor.

Esto es porque Segunda Mejor puso el listón muy alto. Nadie a quien conozca tras haberse puesto serio le tentará, salvo Doña Perfecta. Por eso, aunque llegado el momento no esté seguro de que Doña Perfecta sea Ella, lo llegará a ser, puesto que nadie más puede superar el listón marcado por Segunda Mejor.

La estrategia óptima, sin embargo, es ponerse serio un poco antes, transcurrido $1/e$, o un 37 por ciento, de su potencial vida amorosa. Eso le concede una probabilidad de $1/e$ de acabar con Doña Perfecta.

A menos que Doña Perfecta no esté jugando también al juego de la e.

§20. Me quiere, no me quiere

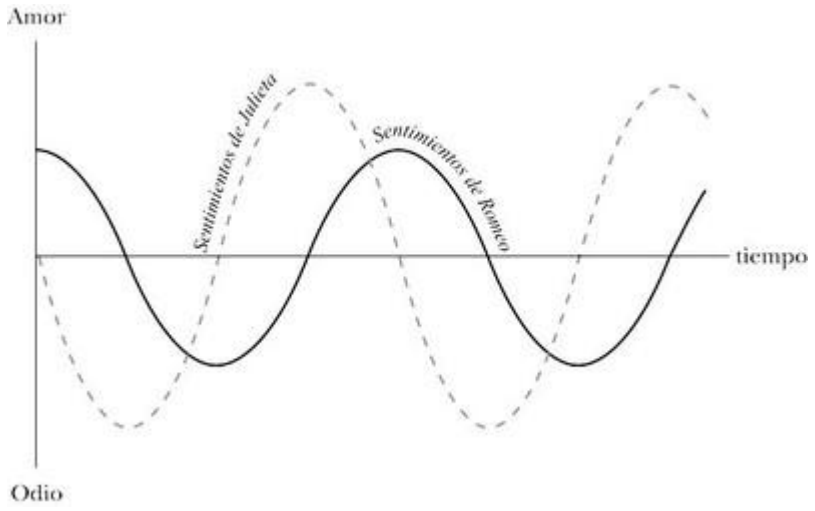
«En primavera», escribió Tennyson, «la fantasía de un joven suavemente se convierte en pensamientos de amor». Desgraciadamente, su posible compañera tiene pensamientos propios, y la interacción entre ambos puede llevar a las tumultuosas subidas y bajadas que hacen del nuevo amor algo tan emocionante, y tan doloroso. Muchas almas en pena han buscado en la bebida la respuesta a estos vaivenes, otros en la poesía. Nosotros consultaremos al cálculo.

El análisis que sigue es irónico, pero toca un punto serio: mientras que las leyes del corazón pueden eludirnos siempre, las leyes de lo inanimado se entienden ahora perfectamente. Adoptan la forma de ecuaciones diferenciales, que describen cómo variables interconectadas cambian de un momento a otro, dependiendo de sus valores actuales. En cuanto a la relación de estas ecuaciones con el romanticismo…, bueno, al menos arrojan algo de luz sobre por qué, en palabras de otro poeta, «el curso del verdadero amor nunca fluyó con suavidad».

Para ilustrar esta idea, supongamos que Romeo está enamorado de Julieta[80], pero, en nuestra versión de la historia, Julieta es una amante inconstante. Cuanto más la quiere Romeo, más ganas tiene ella de huir y esconderse. Pero cuando él asume la indirecta y se retira, ella empieza a encontrarle extrañamente atractivo. Él, sin embargo, tiende a reflejarse en ella: se anima cuando ella le quiere y se enfría cuando le odia.

¿Qué les pasa a nuestros desventurados amantes? ¿Cómo va y viene su amor a lo largo del tiempo? Aquí es donde aparece el cálculo. Escribiendo ecuaciones que resuman la manera en que Romeo y Julieta responden a los afectos mutuos y luego

resolviéndolas por medio del cálculo, podemos predecir el curso de su relación. El pronóstico resultante es, trágicamente, un ciclo interminable de amor y odio. Por lo menos, logran un amor simultáneo durante un cuarto del tiempo.



Para alcanzar esta conclusión, he asumido que el comportamiento de Romeo puede modelarse mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$dR/dt = aJ,$$

que describe cómo su amor (representado por *R)* cambia en el instante siguiente (representado por *dt)*. De acuerdo con esta ecuación, la cantidad de cambio *(dR)* es solo un múltiplo *(a)* del amor actual de Julieta *(J)*. Esto refleja lo que ya sabemos —que el amor de Romeo incrementa cuando Julieta le quiere—, pero asume algo más serio. Dice que el amor de Romeo incrementa en proporción lineal directa a cuanto le quiere Julieta. Esta asunción de linealidad no es emocionalmente realista, pero hace que la ecuación sea más sencilla de resolver.
El comportamiento de Julieta, contrariamente, puede modelarse por la ecuación:

$$dJ/dt = -bR$$

El signo negativo frente a la constante *b* refleja la tendencia de Julieta a enfriarse cuando Romeo la quiere.

Lo único que nos queda por saber es cómo se sentían inicialmente los amantes (*R* y *J* en tiempo $t = 0$). Entonces, todo en su relación está predeterminado. Podemos utilizar un ordenador para mover lentamente hacia delante a *R* y *J*, cambiando sus valores instante a instante, tal y como sugieren las ecuaciones diferenciales. De hecho, con la ayuda del teorema fundamental del cálculo, podemos llegar más lejos. Puesto que el modelo es muy simple, no tenemos que arrastrarnos poco a poco. El cálculo ofrece un par de fórmulas generales que nos dicen cuánto se querrán (u odiarán) Romeo y Julieta en *cualquier* momento futuro.

Las ecuaciones diferenciales anteriores deben resultar familiares a estudiantes de física: Romeo y Julieta se comportan como osciladores armónicos simples. Así, el modelo predice que $R(t)$ y $J(t)$ —las funciones que describen el curso del tiempo de su relación— serán ondas sinusoidales, cada una creciente y menguante, pero alcanzando su máximo en diferentes momentos.

El modelo puede hacerse más realista de varias maneras. Por ejemplo, puede que Romeo reaccione tanto ante sus propios sentimientos como ante los de Julieta. Puede ser el tipo de hombre al que le preocupa abalanzarse sobre ella y que, por tanto, decide ir más despacio mientras su amor continúa creciendo. O puede que sea un tipo de hombre al que le gusta tanto sentirse enamorado que la ama aún más por ello.

Añada a esas dos posibilidades las dos maneras en que Romeo puede reaccionar a los afectos de Julieta —aumentando o disminuyendo sus propios afectos— y verá que existen cuatro tipos de personalidades, cada una correspondiente a un estilo distinto de amar. Mis alumnos y los de la clase de Peter Christopher en el Instituto Politécnico de Worcester han sugerido nombres tan descriptivos como Ermitaño y Misántropo Malévolo para el tipo de Romeo que sofoca su propio amor y además retrocede ante el amor de Julieta. Por otra parte, el Romeo que se infla con su propio ardor pero que se apaga con el de Julieta ha sido bautizado como Empollón Narcisista, Mejor Latente Que Nunca y Mequetrefe Coqueteador. (No dude en proponer apodos para estos dos tipos y las otras dos posibilidades).

Aunque son ejemplos caprichosos, lo que surge a partir ellos tiene mucha profundidad. Representan la herramienta más poderosa que ha creado la humanidad para hacer inteligible el mundo material. Sir Isaac Newton empleó las ecuaciones diferenciales para resolver el antiguo misterio del movimiento planetario. Haciéndolo, unificó las esferas terrestre y celeste, mostrando que las mismas leyes de movimiento se aplicaban a ambas.

En los casi 350 años transcurridos desde Newton, la humanidad ha descubierto que las leyes físicas siempre se expresan mediante ecuaciones diferenciales. Esto es cierto para las ecuaciones que regulan el flujo del calor, aire y agua; para las leyes de electricidad y magnetismo; incluso para el desconocido y contraintuitivo ámbito atómico, donde reina la mecánica cuántica.

En cualquier caso, el negocio de la física teórica se reduce a la búsqueda de las ecuaciones diferenciales adecuadas y a su resolución. Cuando Newton descubrió la llave de los secretos del universo, sintió que era tan preciada, que la publicó únicamente como un anagrama en latín. Libremente traducido, dice algo así: «Es útil resolver ecuaciones diferenciales»[81].

La absurda idea de que las relaciones amorosas podrían asimismo ser descritas por ecuaciones diferenciales se me ocurrió cuando me enamoré por primera vez y trataba de comprender el desconcertante comportamiento de mi novia. Fue un romance veraniego al final de mi segundo año en la universidad. Me comporté de manera muy similar al primer Romeo que hemos descrito y ella era todavía más parecida a la primera Julieta. Los ciclos de nuestra relación me volvían loco, hasta que me di cuenta de que ambos nos comportábamos de manera mecánica, siguiendo simples normas de tira y afloja. Pero a finales del verano mis ecuaciones comenzaron a romperse y estaba más desconcertado que nunca. Sucedió que había dejado fuera de la ecuación una importante variable: su antiguo novio quería volver con ella.

En matemáticas esto se conoce como el problema de los tres cuerpos. Resulta notoriamente intratable, especialmente en un contexto astronómico, donde surgió por primera vez. Cuando Newton resolvió las ecuaciones diferenciales para el problema de dos cuerpos (explicando por qué los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol), se interesó en el problema de los tres cuerpos: Tierra, Sol y Luna. No pudo resolverlo él, ni nadie. Resultó que el problema de los tres cuerpos contenía las semillas del caos[82], lo que hacía su comportamiento imprevisible a largo plazo.

Newton no sabía nada de la teoría del caos, pero, según su amigo Edmund Halley, se quejaba de que el problema de los tres cuerpos «le provocaba dolor de cabeza y le *mantenía despierto tan a menudo que dejaría de pensar en él*».[83]

Sir Isaac, en eso estoy contigo.

§21. Salir a la luz

El señor DiCurcio fue mi mentor en el instituto. Era desagradable y exigente, llevaba gafas negras de pasta propias de un empollón y tenía tendencia al sarcasmo, así que sus encantos pasaban desapercibidos. Sin embargo, su pasión por la física me resultó irresistible.

Un día le mencioné que estaba leyendo una biografía de Einstein. Según el libro, Einstein, siendo universitario, había quedado deslumbrado por algo llamado ecuaciones de Maxwell para la electricidad y el magnetismo, y le dije al señor DiCurcio que estaba deseando tener suficientes conocimientos de matemáticas para aprender lo que eran.

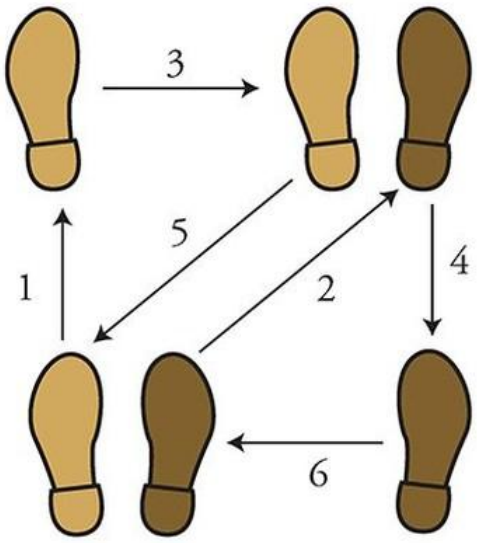
Era un colegio interno y estábamos cenando en una mesa grande con muchos otros alumnos, su mujer y sus dos hijas. El señor DiCurcio estaba sirviendo puré de patata y al escuchar que mencionaba las ecuaciones de Maxwell soltó la cuchara, agarró una servilleta de papel y comenzó a escribir símbolos crípticos —puntos y cruces, triángulos al revés, *E*s y *B*es con flechas sobre ellas—; de repente pareció estar afectado de glosolalia: «La curv de una curv es grad div menos del al cuadrado…».

¿Qué era todo eso que estaba murmurando? Me di cuenta de que hablaba en la lengua del cálculo vectorial[84], la rama matemática que describe los campos invisibles que nos rodean. Piense en el campo magnético que orienta la aguja de una brújula hacia el norte, o en el campo gravitacional que tira de su silla hacia el suelo, o en el campo de microondas que calientan su cena.

Los grandes logros del cálculo vectorial radican en ese reino crepuscular en que la matemática se encuentra con la realidad. Por supuesto, la historia de James Clerk Maxwell y sus ecuaciones ofrece uno de los casos más misteriosos de la efectividad irracional de las matemáticas. De alguna manera, barajando algunos símbolos, Maxwell descubrió lo que era la luz[85].

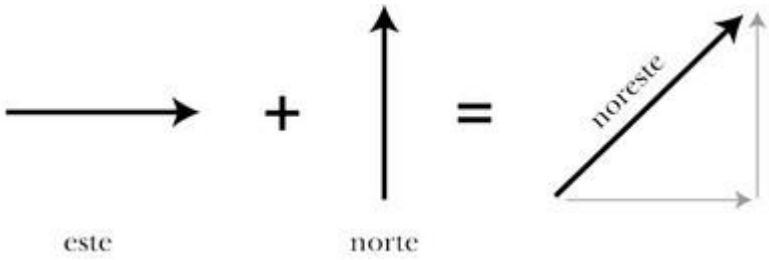
Para dar sentido a lo que Maxwell logró y entender en qué consiste el cálculo vectorial, comencemos con el término «vector». Proviene de la raíz latina *vehere*, «llevar», de la que también surgen palabras como «vehículo». Para un epidemiólogo, un vector es el portador de un patógeno, como el mosquito que transporta la malaria a nuestra sangre. Para un matemático, un vector (al menos en su forma más simple) es un escalón que nos lleva de un lugar a otro.

Piense en uno de esos diagramas para aspirantes a bailarines de salón, repleto de flechas que indican cómo mover el pie derecho, luego el pie izquierdo, como cuando se baila la rumba:



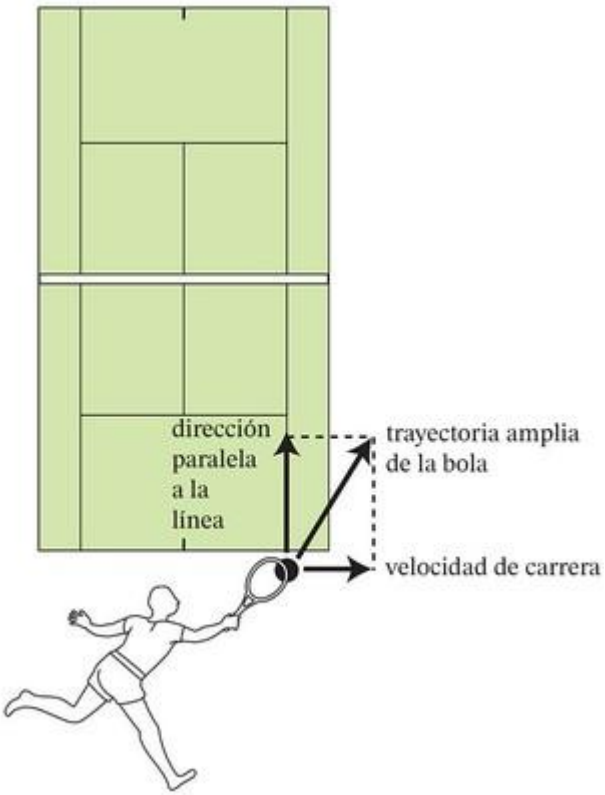
Estas flechas son vectores. Muestran dos tipos de información: una dirección (hacia dónde mover el pie) y una magnitud (hasta dónde moverlo). Todos los vectores cumplen esta doble función.

Los vectores pueden sumarse y restarse, como los números, pero su direccionalidad complica un poco las cosas. Aun así, la forma más correcta de sumar vectores se aclara si los concibe como lecciones de baile. Por ejemplo, ¿qué obtiene dando un paso al este seguido de uno al norte? Naturalmente, un vector que apunta hacia el noreste.



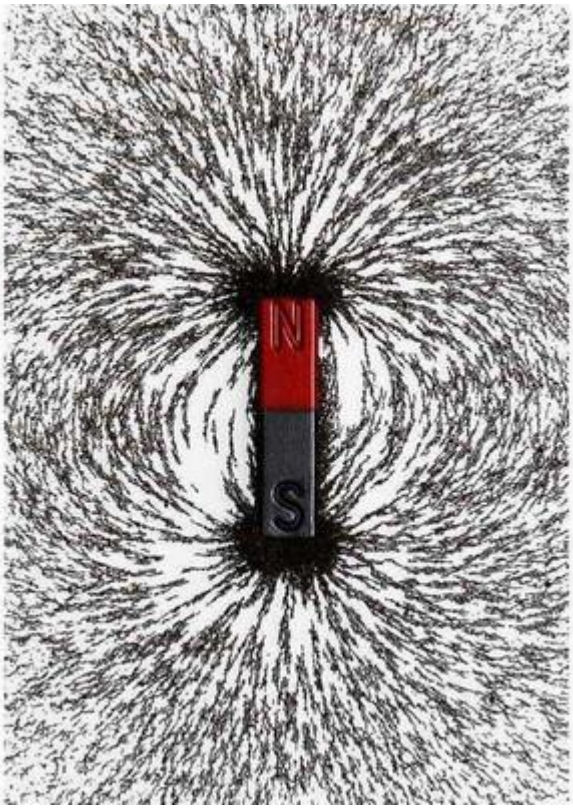
Sorprendentemente, las velocidades y fuerzas funcionan de la misma manera: también se suman como pasos de baile. Esto resultará familiar a cualquier aficionado al tenis que haya tratado de imitar a Pete Sampras dando una derecha mientras esprinta hacia la línea lateral. Si apunta ingenuamente hacia donde quiere que se dirija la bola, la trayectoria será demasiado amplia, porque olvidó tener en cuenta su propia carrera. La velocidad de la bola relativa a la pista es la suma de

dos vectores: la velocidad de la bola relativa a usted (un vector apuntando hacia delante, como se pretende), y su velocidad relativa a la pista (un vector que apunta hacia un lado, ya que esa es la dirección en la que corre). Para golpear la bola hacia donde quiere que vaya debe apuntar ligeramente cruzado, para compensar su propio movimiento lateral.



Más allá del álgebra vectorial yace el cálculo vectorial, el tipo de matemática que empleaba el señor DiCurcio. El cálculo, como recordará, es la matemática del cambio. Por lo tanto, sea lo que sea el cálculo vectorial, debe implicar vectores cambiantes, ya sea de momento o de lugar. En este último caso, se habla de «campo vectorial».

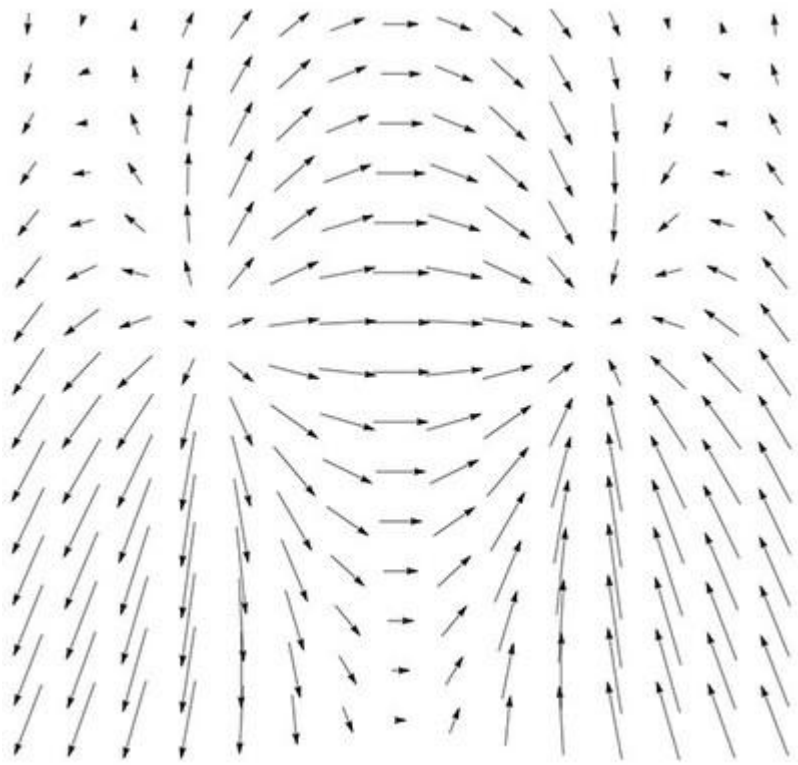
Un ejemplo clásico es el campo de fuerza en torno a un imán. Para visualizarlo coloque un imán en un trozo de papel y esparza limaduras de hierro por todas partes. Cada limadura actúa como una pequeña aguja de brújula: se alinea con la dirección del «norte» local, determinado por el campo magnético en ese punto. Visto en conjunto, estas limaduras revelan un cuadro espectacular de líneas de campo magnético que conducen de un polo del imán a otro.



Alchemy / Alamy

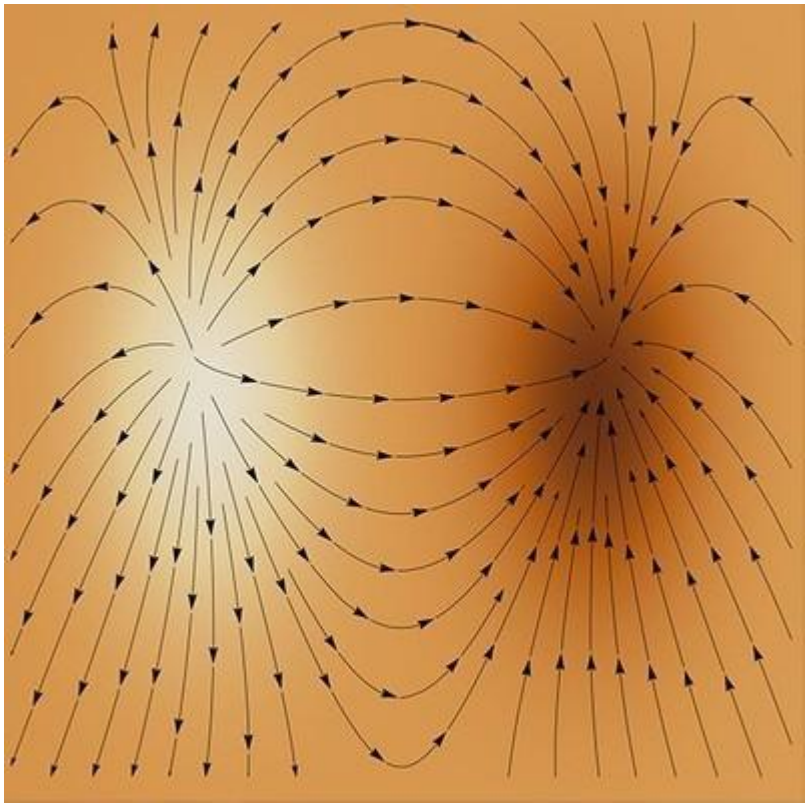
La dirección y magnitud de los vectores en un campo magnético varían de un punto a otro. Como en el cálculo en general, la herramienta clave para cuantificar dichos cambios es la derivada. En cálculo vectorial, el operador de la derivada se hace llamar «del», que aunque suena sureño y folclórico alude a la letra griega Δ (delta), frecuentemente utilizada para denotar un cambio en alguna variable. Como recordatorio de este parentesco, «del» suele escribirse así: ∇. Este era el misterioso triángulo invertido que el señor DiCurcio escribía sin parar en la servilleta.

Resulta que existen dos maneras distintas pero igualmente naturales de tomar la derivada de un campo vectorial aplicándole *del*. La primera aporta lo que se conoce como la divergencia del campo (el «div» que el señor DiCurcio murmuraba). Para tener una aproximación intuitiva de lo que mide la divergencia, observe el campo vectorial siguiente, que muestra cómo el agua fluiría desde una fuente situada a la izquierda hacia un sumidero situado a la derecha.

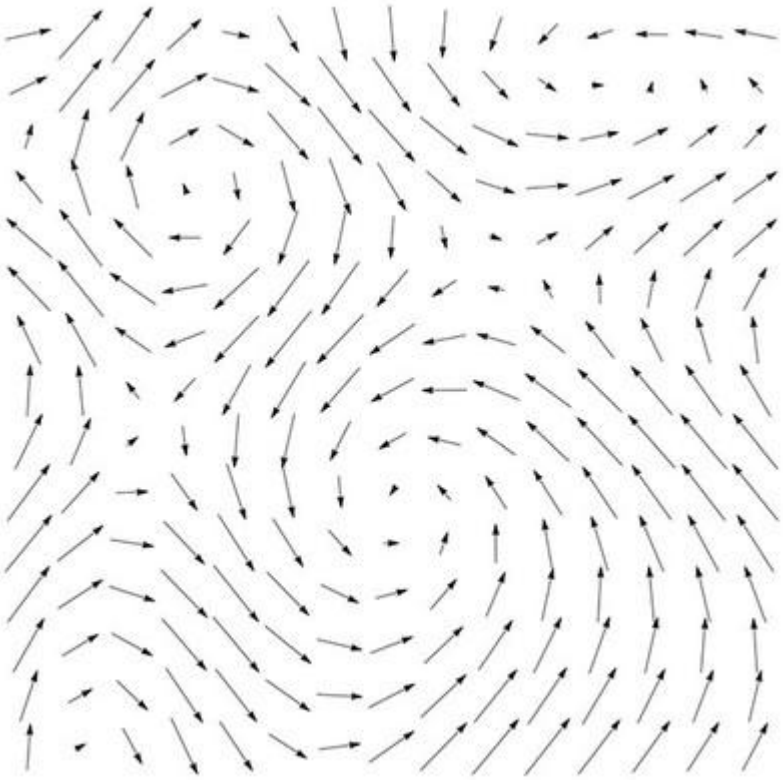


Para este ejemplo, en lugar de utilizar limaduras de hierro para localizar el campo vectorial, imagine varios pequeños corchos o pequeños pedazos de hojas flotando en la superficie del agua. Los utilizaremos como sondas. Su movimiento nos dirá cómo se mueve el agua en cada punto. Concretamente, imagine qué sucedería si colocamos un pequeño círculo de corchos alrededor de la fuente. Obviamente, los corchos se esparcirían y el círculo crecería, porque el agua sale y se aleja de la fuente. Aquí *diverge*. Y cuanto más fuerte sea la divergencia, más rápido crecerá el área de nuestro círculo de corchos. Esto es lo que mide la divergencia de un campo vectorial: a qué velocidad crece el área de un pequeño círculo de corchos.

La imagen siguiente muestra el valor numérico de la divergencia en cada punto del campo que hemos estado observando, codificado por tonos grises. Tonos más claros muestran puntos donde el flujo ha tenido divergencia positiva. Los tonos más oscuros muestran lugares de divergencia negativa, es decir, puntos en los que el flujo comprime un pequeño círculo de corcho centrado allí.

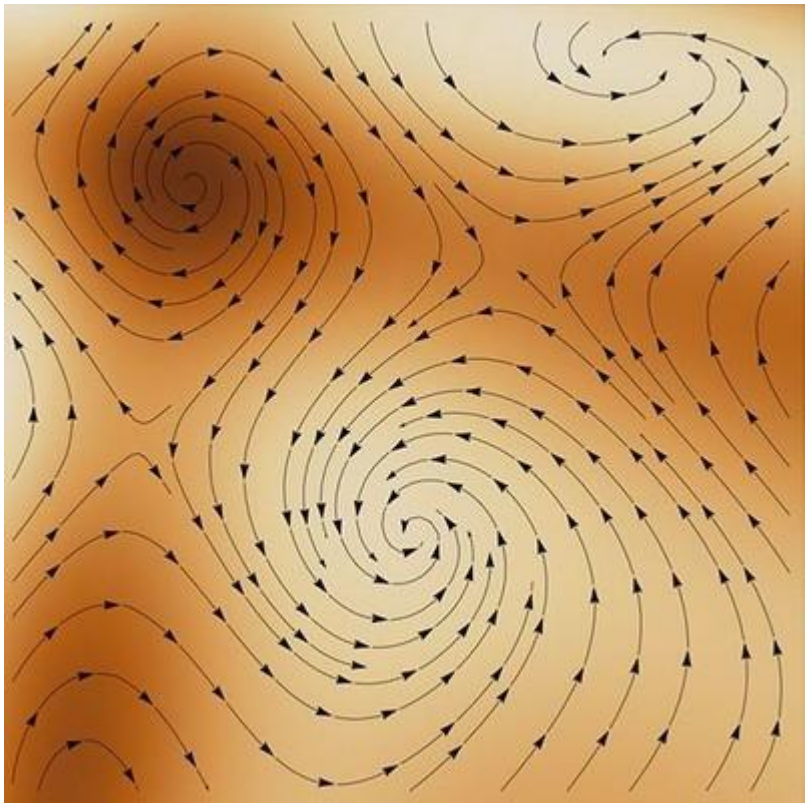


El otro tipo de derivada mide la curvatura de un campo vectorial. Hablando toscamente, indica con qué fuerza está girando el campo en torno a un punto determinado. (Piense en los mapas del tiempo que ha visto en las noticias que muestran los patrones de viento rotando alrededor de huracanes o tormentas tropicales). En el campo vectorial siguiente, las regiones que parecen huracanes tienen una gran rotación.



Adornando el campo vectorial con sombreado, podemos mostrar dónde la rotación es más positiva (regiones más claras) y más negativa (regiones más oscuras). Fíjese que esto también nos indica si el flujo gira en el sentido de las agujas del reloj o al revés.

La rotación es tremendamente informativa para aquellos científicos que trabajen en mecánica de fluidos y aerodinámica. Hace unos años, mi colega Jane Wang utilizó un ordenador para simular el patrón de flujo de aire alrededor de una libélula que flotaba quieta en un punto[86]. Calculando la rotación, halló que cuando una libélula bate sus alas crea parejas de vórtices contrarrotatorios que se comportan como pequeños tornados bajo sus alas, produciendo suficiente elevación para mantener al insecto en el aire. En este sentido, el cálculo vectorial ayuda a explicar cómo pueden volar las libélulas, abejorros y colibríes, algo que durante mucho tiempo había sido un misterio para la aerodinámica de ala fija convencional.



Con las nociones de divergencia y rotación a mano, ya podemos revisitar las ecuaciones de Maxwell. Expresan cuatro leyes fundamentales: una para la divergencia del campo eléctrico, otra para su rotación y dos más del mismo tipo, pero ahora para el campo magnético. Las ecuaciones de divergencia relacionan los campos eléctricos y magnéticos con sus fuentes, las partículas cargadas y corrientes que las producen en primer término. Las ecuaciones rotacionales describen cómo interactúan y cambian a lo largo del tiempo los campos eléctricos y magnéticos. Estas ecuaciones expresan así una bella simetría: vinculan la tasa de cambio de un campo en el *tiempo* a la tasa de cambio del otro campo en el *espacio*, tal como se cuantifica por su rotacional.

Con maniobras matemáticas equivalentes al cálculo vectorial —que en su tiempo se desconocía— Maxwell extrajo las consecuencias lógicas de esas cuatro ecuaciones. Su mezcla de símbolos le llevó a la conclusión de que los campos eléctricos y magnéticos podrían propagarse como una onda, como sucede en un estanque, salvo que estos dos campos se parecían más a organismos simbióticos. Se sostenían mutuamente. Las ondulaciones del campo eléctrico rehacían el campo magnético,

que a su vez rehacía el campo eléctrico y así sucesivamente, con uno tirando del otro hacia delante, algo que por separado ninguno podía hacer.

Ese fue el primer avance: la predicción teórica de las ondas electromagnéticas. Pero lo verdaderamente increíble vino después. Cuando Maxwell calculó la velocidad de estas ondas hipotéticas, empleando propiedades conocidas de la electricidad y el magnetismo, sus ecuaciones le dijeron que viajaban a unas 193 00 millas por segundo, la misma que la velocidad de la luz medida por el físico francés Hyppolyte Fizeau una década antes.

Ojalá hubiera presenciado el momento en que un ser humano, por primera vez, entendió la verdadera naturaleza de la luz[87]. Identificándola con una onda electromagnética, Maxwell unificó tres antiguos fenómenos, aparentemente sin relación: electricidad, magnetismo y luz. Aunque experimentadores como Faraday y Ampère habían encontrado ya piezas clave para este puzle, fue Maxwell, armado con sus matemáticas, quien los puso todos juntos.

Hoy estamos inundados por las —en su día hipotéticas— ondas de Maxwell: radio, televisión, teléfonos móviles, wi-fi; todas ellas, legado de su conjuro con símbolos[88].

Quinta Parte
Datos

Contenido:

§22. La nueva normalidad
§23. Es probable
§24. Desenredando la Red

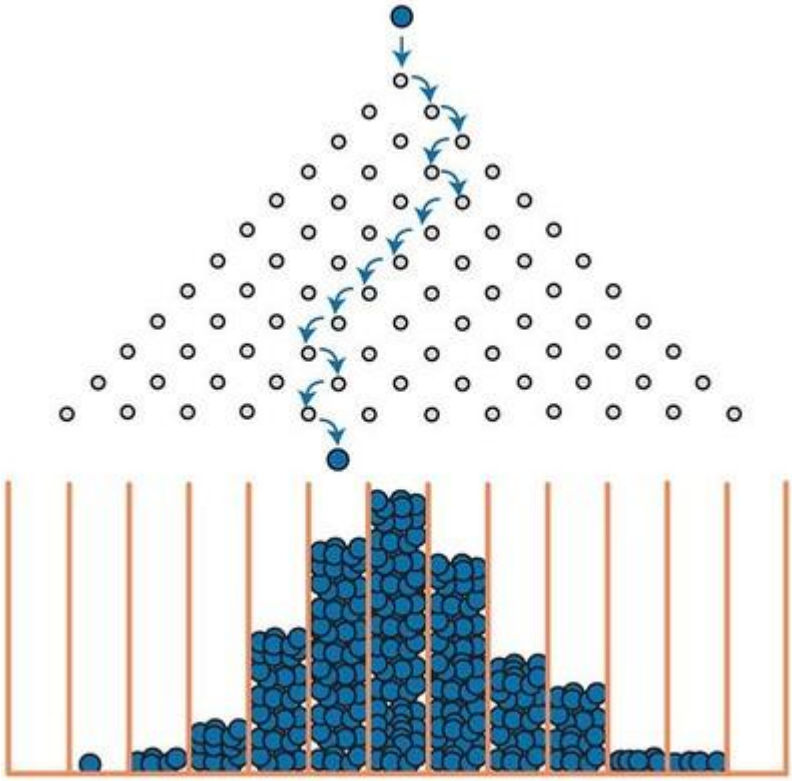
§22. La nueva normalidad

La estadística se ha puesto repentinamente de moda. Gracias al surgimiento de Internet, el comercio electrónico, las redes sociales, el Proyecto Genoma Humano y la cultura digital en general, el mundo está repleto de datos[89]. Los vendedores examinan nuestros hábitos y gustos. Las agencias de inteligencia recopilan datos acerca de nuestros paraderos, e-mails y llamadas telefónicas. Estadísticos deportivos hacen crujir los números[90] para decidir a qué jugadores fichar, a qué promesas reclutar e incluso a qué lado lanzar el último penalti de la tanda. Todo el mundo quiere unir los puntos para dar con la aguja del significado en el pajar de los datos.

Así que no sorprende que se aconseje a los estudiantes de acuerdo con esta tendencia. «Aprendan estadística», exhortaba Greg Mankiw, un economista de Harvard, en una columna publicada en 2010 en *The New York Times*. «Los planes de estudio de las matemáticas de instituto invierten demasiado tiempo en temas tradicionales, como la geometría euclídea y la trigonometría. Para una persona normal, estos son ejercicios intelectuales útiles, pero tienen poca aplicación a la vida diaria. A los alumnos les iría mejor si aprendieran más probabilidad y estadística»[91]. David Brooks lo dijo sin rodeos. En una columna acerca de las asignaturas universitarias que todo el mundo debería escoger para tener una formación apropiada, escribió: «Cursad estadística. Lo siento, pero más adelante os daréis cuenta de que es útil saber lo que es una desviación estándar»[92].

Sí, y aún es más útil saber qué es una distribución. Esta es la primera idea en la que me gustaría centrarme, puesto que envuelve una de las lecciones clave de la estadística[93]: cosas que parecen irremediablemente aleatorias e impredecibles cuando se observan de manera aislada suelen mostrarse regladas y previsibles cuando se consideran en conjunto.

Puede que haya visto una demostración de este principio en un museo de ciencias (si no, hay vídeos online). La muestra estándar consiste en un tinglado llamado la tabla de Galton[94], que tiene un aspecto parecido al de una máquina de pinball, salvo que no tiene aletas y sus paragolpes consisten en una matriz regular de clavijas espaciadas uniformemente y colocadas en filas.



La demostración comienza cuando cientos de bolas se vierten a la parte superior de la tabla. Mientras caen, rebotan aleatoriamente en las clavijas, a veces hacia la izquierda, a veces hacia la derecha y, finalmente, se distribuyen en los contenedores, uniformemente espaciados, en la parte inferior. La altura de las bolas apiladas en cada contenedor muestra lo probable que era que una bola aterrizase allí. La mayoría de las bolas terminan cerca del centro, con ligeramente menos bolas a cada lado y aún menos en los extremos. En conjunto, el patrón es totalmente predecible: siempre tiende a una distribución en forma de campana, aunque es imposible predecir dónde va ir a parar una bola concreta.

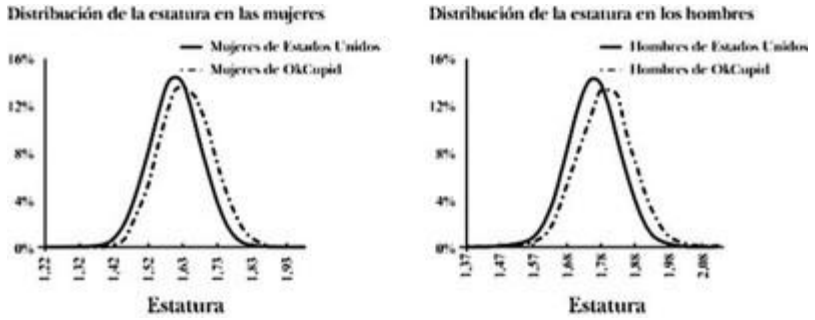
¿Cómo se convierte la aleatoriedad individual en regularidad colectiva? Sencillo: lo exigen las probabilidades. El contenedor central será, seguramente, el más poblado porque la mayoría de las bolas rebotarán aproximadamente el mismo número de

veces a izquierda y derecha antes de llegar abajo. Así que terminarán cerca del centro. Las únicas bolas que llegarán a cualquiera de los extremos lejanos, los márgenes de la distribución donde viven los valores atípicos, son aquellas que curiosamente rebotan en la misma dirección cada vez que chocan contra una clavija. Esto es muy improbable, por eso hay tan pocas bolas alojadas allí.

Así como la ubicación última de cada bola viene determinada por la suma de muchas casualidades, muchos fenómenos del mundo son resultado de pequeños accidentes; también ellos están dominados por formas acampanadas. Las compañías de seguros cuentan con ello. Saben con precisión cuántos de sus clientes morirán cada año. Lo que no saben es quiénes serán los desafortunados.

O piense en cuánto mide. Su estatura depende de innumerables casualidades de la genética, bioquímica, nutrición y entorno. En consecuencia, es posible que las distintas estaturas de los adultos, vistas en conjunto, tengan también una forma acampanada[95].

En una publicación de un blog titulada «Las grandes mentiras que dice la gente en las citas online», el servicio de citas OkCupid[96] mostró recientemente un gráfico de la altura que tienen sus miembros —o, más bien, la que dicen tener— y percibieron que las medidas aportadas por ambos sexos siguen formas acampanadas, como se esperaba. Lo que sorprende, no obstante, es que ambas medidas aparecen desplazadas unos cinco centímetros hacia la derecha.



Christian Rudder / OkCupid

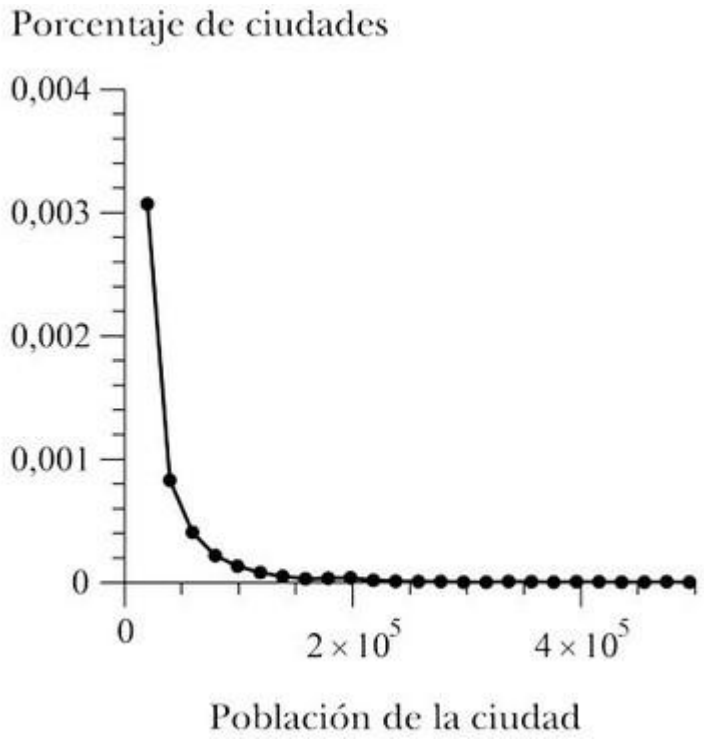
Por lo tanto, o bien las personas que se unen a OkCupid son inusualmente altas, o bien exageran su altura en el momento de describirse online.

Una versión idealizada de estas curvas campana es lo que los matemáticos llaman distribución normal. Es uno de los conceptos más importantes de la estadística. Parte de su encanto es teórico. La distribución normal se puede demostrar que

surge cuando se suman un gran número de efectos ligeramente aleatorios, de tamaño similar y actuando de forma independiente. Y así son muchas cosas.

Pero no todo. Esta es la segunda cuestión que me gustaría destacar. La distribución normal no es tan ubicua como pareció ser. Durante unos cien años, y especialmente durante las últimas décadas, los estadísticos y científicos se han percatado de que muchos fenómenos se desvían de este modelo, pero siguen un patrón propio. Curiosamente, este tipo de distribuciones rara vez se menciona en los manuales de estadística elemental, y, cuando se mencionan, los sacan a relucir como especímenes patológicos. Es indignante, porque, como trataré de explicar, gran parte de la vida moderna cobra sentido cuando se entienden estas distribuciones. Son la nueva normalidad.

Tomemos como ejemplo la distribución de las ciudades de Estados Unidos. En lugar de agruparse en torno a un valor intermedio, en forma acampanada, la gran mayoría de pueblos y ciudades son pequeños y, por tanto, se apiñan en el lado izquierdo del gráfico.

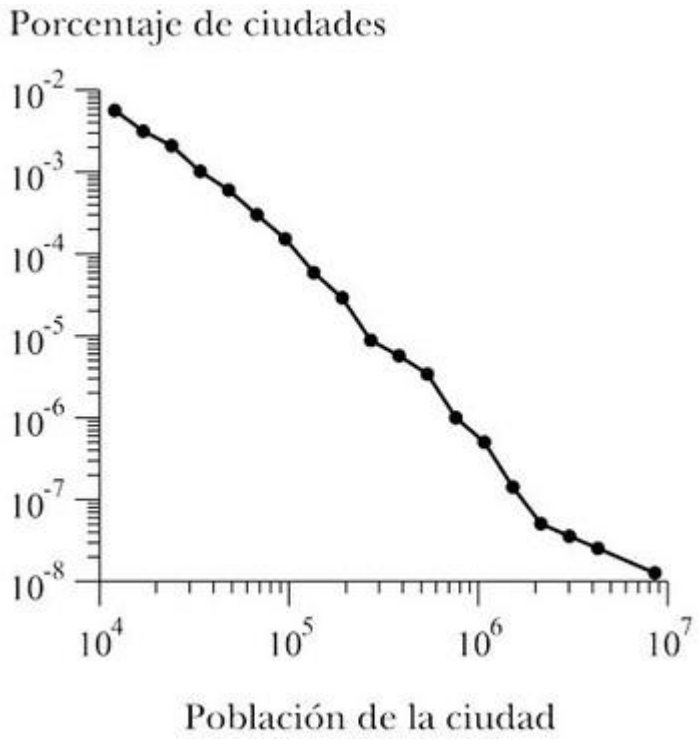


M. E. J. Newman

Y cuanto mayor sea la población de una ciudad, más infrecuente es una ciudad de ese tamaño. Visto en conjunto, la distribución se parece más a una curva en forma de L que a una curva campana.

No hay nada sorprendente en esto. Todo el mundo sabe que las grandes ciudades son más escasas que las pequeñas. Lo que es menos evidente es que el tamaño de las ciudades sigue una distribución simple…, siempre y cuando se observe desde lentes logarítmicas.

En otras palabras, suponga que observamos que la diferencia de tamaño entre un par de ciudades es la misma si sus poblaciones difieren por el mismo *factor*, en lugar de por el mismo número absoluto de población (al igual que dos tonos, a una octava de distancia, siempre se distinguen por un factor constante del doble de la frecuencia). Y suponga que hacemos lo mismo en el eje vertical.



M. E. J. Newman

Los datos caen en una curva que es casi una línea recta. De las propiedades de los logaritmos, deducimos que la curva-L original era una ley de potencia, una función con la forma

$$y = C/x^a$$

donde *x* es el tamaño de la ciudad, *y* es cuántas ciudades tienen ese tamaño, *C* es una constante y el exponente *a* (la potencia en la ley de potencia) es el negativo de la pendiente de la recta.

Las distribuciones de la ley de potencias[97] tienen propiedades contraintuitivas desde la perspectiva de la estadística tradicional. Por ejemplo, a diferencia de distribuciones normales, sus modas, medianas y medias no concuerdan debido a las formas torcidas y asimétricas de sus curvas-L. El presidente Bush hizo uso de esta propiedad cuando dijo que su bajada de impuestos de 2003[98] había ahorrado una media de 1586 dólares a cada familia. Aunque el dato es técnicamente correcto, se estaba refiriendo, convenientemente, a la rebaja *media*. La cifra surge del reembolso de cientos de miles de dólares del que se benefició el 0,1 por ciento más rico de la población. La cola del extremo derecho de la distribución de ingresos sigue una ley de potencia y, en situaciones como esta, la media es una estrategia engañosa porque está lejos de ser la norma. De hecho, la mayoría de las familias recibieron menos de 650 dólares. La mediana fue muy inferior a la media.

Este ejemplo subraya la característica más importante de la distribución de la ley de potencias. Sus colas son pesadas (también llamadas anchas o largas), al menos en comparación con la insignificante cola de la distribución normal. Valores atípicos tan grandes, aunque sean raros, son mucho más frecuentes en estas distribuciones que en las curvas campana.

El 19 de octubre de 1987, día que hoy conocemos como Lunes Negro, el promedio industrial del Dow Jones cayó un 22 por ciento. Comparado con el nivel habitual de volatilidad en la bolsa, esta era una caída de más de veinte desviaciones estándar. Este hecho es casi imposible de acuerdo con las estadísticas de la curva campana; su probabilidad es inferior a 1 en 100 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 (10 elevado a la 50.ª potencia). Aun así, sucedió… porque las fluctuaciones en los precios de acciones[99] no siguen distribuciones normales. Se describen mejor con distribuciones de larga cola.

Lo mismo sucede con los terremotos, incendios forestales e inundaciones, lo cual complica la labor de gestión de riesgos para las aseguradoras. El mismo patrón matemático se mantiene para el número de muertes provocadas por guerras y ataques terroristas e incluso para cosas benignas, como la frecuencia de ciertas palabras en novelas y el número de compañeros sexuales que tiene la gente.

Aunque los adjetivos empleados para describir sus prominentes colas no se pensaron para ser halagüeños, dichas distribuciones los llevan con orgullo. ¿Anchas, pesadas y largas?[100]. Sí, así es. Ahora, dígame, ¿quién es normal?

§23. Es probable

¿Alguna vez ha tenido el angustioso sueño en el que se percata de que aún tiene pendiente el examen final de un curso al que nunca ha asistido? Para los profesores, la cosa se invierte: soñamos que estamos dando una clase acerca de un tema del que no sabemos nada.

Así me siento yo cada vez que enseño teoría de la probabilidad[101]. Nunca formó parte de mi educación, así que tener que enseñarla ahora me produce miedo y diversión, como la casa del terror del parque de atracciones.

Quizá el tema que más me acelera el pulso es la probabilidad condicionada, la probabilidad de que un acontecimiento A venga dado (o condicionado) por otro acontecimiento B. Es un concepto resbaladizo, fácilmente confundible con la probabilidad de B dado A. No son iguales, pero exige concentración el ver por qué. Por ejemplo, considere el siguiente problema.

Antes de empezar unas vacaciones de una semana, le pide a un amigo, algo despistado, que riegue su planta enferma mientras usted está fuera[102]. Sin agua, la planta tiene una probabilidad de morir del 90 por ciento. Incluso con el riego adecuado, tiene un 20 por ciento de probabilidades de morir. Y la probabilidad de que su amigo se olvide de regarla es del 30 por ciento. (a) ¿Qué probabilidades tiene su planta de sobrevivir la semana? (b) Si la encuentra muerta al volver, ¿cuál es la probabilidad de que su amigo olvidara regarla? (c) Si su amigo olvidó regarla, ¿qué probabilidad hay de que al volver la encuentre muerta? Aunque suenen parecido, (b) y (c) no son iguales. De hecho, el problema nos dice que la respuesta a (c) es 90 por ciento. Pero ¿cómo combina todas las probabilidades para obtener (b) o (a)?

Evidentemente, los primeros semestres que enseñé esta asignatura me ceñí al manual, sin asumir riesgos. Pero, poco a poco, fui notando algo. Muchos de mis alumnos evitaban utilizar el teorema de Bayes, la fórmula laberíntica que les estaba enseñando. Resolvían los problemas mediante un método equivalente que parecía más sencillo.

Estos ingeniosos estudiantes descubrían, año tras año, una manera mejor de pensar en probabilidad condicional. Su método concuerda con la intuición humana, en

lugar de confundirla. El truco consiste en pensar en términos de frecuencias naturales —simples recuentos de acontecimientos— en lugar de en nociones porcentuales o probabilísticas más ambiguas. En cuanto se realiza este giro mental, la niebla se disipa.

Esta es la lección crucial de *Calculated Risks* [Riesgos calculados], un libro fascinante de Gerd Gigerenzer, un psicólogo cognitivo conductista del Instituto Max Planck para el Desarrollo Humano en Berlín. En una serie de estudios acerca de asuntos médicos y legales, desde asesoramiento a enfermos de sida pasando por la interpretación del ADN en huellas dactilares, Gigerenzer explora cómo las personas fallan al calcular mal el riesgo y la incertidumbre. Pero en lugar de reprender o lamentar la flaqueza humana, nos explica cómo hacerlo mejor: recuperar la probabilidad condicional en términos de frecuencias naturales para evitar que se nuble el juicio. Muy en la línea de lo que hacían mis alumnos.

En un estudio, Gigerenzer y sus colegas pidieron a doctores de Alemania y Estados Unidos que estimaran la probabilidad de que una mujer que tiene una mamografía[103] positiva tenga, de hecho, cáncer de pecho aunque pertenezca a un grupo de bajo riesgo: de cuarenta a cincuenta años, sin síntomas ni antecedentes familiares. Para concretar la pregunta, se dijo a los doctores que asumieran las siguientes estadísticas —expresadas en términos de porcentajes y probabilidades— acerca de la frecuencia del cáncer de mama en mujeres de este grupo y acerca de la sensibilidad de las mamografías y su tasa de falsos positivos.

> *La probabilidad de que una de estas mujeres tenga cáncer de mama es del 0,8 por ciento. Si una mujer tiene cáncer de mama, la probabilidad de que tenga una mamografía positiva es del 7 por ciento. Imagine una mujer que tiene una mamografía positiva. ¿Qué probabilidad existe de que realmente tenga cáncer de mama?*

Gigerenzer describe la reacción del primer doctor, un jefe de departamento de un hospital universitario con más de treinta años de experiencia profesional.

> *Estaba visiblemente nervioso tratando de averiguar qué decirle a la mujer. Tras reflexionar sobre los números, finalmente estimó que la probabilidad de que la mujer tuviera cáncer de mama, dada su mamografía positiva, era de un 90 por ciento. Nervioso, añadió: «Qué tontería, no puedo hacer esto. Debería probar con mi hija, que estudia medicina». Sabía que su estimación era incorrecta, pero no sabía razonarlo mejor. A pesar de que se había pasado*

diez minutos estrujándose la cabeza en busca de una respuesta, era incapaz de extraer una conclusión racional de las probabilidades.

Gigerenzer hizo la misma pregunta a otros veinticuatro doctores alemanes y sus estimaciones iban desde el 1 al 90 por ciento. Ocho de ellos pensaron que la probabilidad era del 10 por ciento o menos; otros ocho dijeron el 90 por ciento; y los ocho restantes dijeron cifras entre el 50 y el 80 por ciento. Imagine lo indignante que debe ser, como paciente, escuchar opiniones tan divergentes.

Sin embargo, 95 de 100 médicos estadounidenses estimaron que la probabilidad de padecer cáncer de mama estaba en torno al 75 por ciento.

La respuesta correcta es 9 por ciento.

¿Cómo puede ser tan baja? Gigerenzer quiere demostrar que el análisis se hace casi transparente si traducimos la información original de porcentajes y probabilidades a frecuencias naturales:

Ocho de cada 100 mujeres tienen cáncer de mama. De estas 8 mujeres, 7 tendrán una mamografía positiva. De las 992 mujeres que no tienen cáncer de mama, unas 70 tendrán una mamografía positiva. Imagine una muestra de mujeres con mamografías positivas. ¿Cuántas tienen realmente cáncer de mama?

Puesto que un total de 7 + 70 = 77 mujeres tienen mamografías positivas y solo 7 de ellas realmente tienen cáncer de mama, la probabilidad de que una mujer tenga cáncer de mama tras una mamografía positiva es 7 de 77, es decir, 1 de 11 o un 9 por ciento.

Preste atención a dos simplificaciones en el cálculo anterior. En primer lugar, hemos redondeado los números decimales. Eso sucedía en algunos puntos, como cuando dijimos «de estas 8 mujeres con cáncer de mama, 7 tendrán un mamografía positiva». Así que sacrificamos algo de precisión por mucha claridad.

En segundo lugar, asumimos que todo sucede exactamente con la frecuencia que sugiere su probabilidad. Por ejemplo, dado que la probabilidad de tener cáncer de mama es del 0,8 por ciento, asumimos que, exactamente, 8 de cada 100 mujeres de nuestra hipotética muestra lo padecen. En realidad, esto no es necesariamente cierto. Los hechos no tienen por qué seguir sus probabilidades; una moneda lanzada 100 veces no siempre tiene que salir cara 500 veces. Pero pretender que sí da la respuesta correcta en problemas como este.

Es cierto que la lógica es un poco inestable —por eso los manuales miran por encima del hombro este enfoque, comparado con el riguroso pero complejo teorema de Bayes—, pero lo que se gana en claridad es justificación suficiente. Cuando Gigerenzer puso a prueba a otro grupo de veinticuatro doctores, esta vez empleando frecuencias naturales, prácticamente todos dieron con la respuesta correcta o quedaron cerca.

Aunque reformular los datos en términos de frecuencias naturales es una gran ayuda, los problemas de probabilidad condicional pueden todavía resultar desconcertantes por otras razones[104]. Es fácil hacer la pregunta incorrecta o calcular la probabilidad correcta pero engañosa.

Tanto la fiscalía como la defensa fueron culpables de esto en el juicio de O. J. Simpson celebrado entre 1994 y 1995[105]. Ambos pidieron al jurado que tuviera en cuenta la probabilidad condicional errónea.

La fiscalía invirtió los primeros diez días del juicio en presentar pruebas de que Simpson tenía un historial de violencia hacia su exmujer Nicole Brown. Presuntamente, la había golpeado, lanzado contra paredes y manoseado en público mientras decía a quienes lo presenciaban: «Esto me pertenece». Pero ¿qué relación guardan estos hechos con un juicio por asesinato? La fiscalía alegó que un patrón de abuso reflejaba un motivo para matar. Tal y como dijo uno de los fiscales: «Un bofetón es preludio de un asesinato».

Alan Dershowitz, por parte de la defensa, contraargumentó que incluso si las acusaciones de violencia doméstica eran ciertas, eran irrelevantes y deberían ser inadmisibles[106]. Más adelante escribió: «Sabíamos que podíamos demostrar, si era necesario, que solo un porcentaje infinitesimal —ciertamente inferior a 1 de cada 2500— de hombres que abofetean o golpean a sus compañeras terminan asesinándolas».

En efecto, ambos bandos pedían que se considerase la probabilidad de que un hombre asesinara a su exmujer, teniendo en cuenta que antes la había maltratado. Pero, como señala el estadístico I. J. Good, ese no es el número en el que hay que fijarse.

La cuestión importante es: ¿qué probabilidad existe de que un hombre haya matado a su exmujer, dado que la maltrataba y que, de hecho, *ha sido asesinada?* Esa probabilidad resulta ser mucho mayor a 1 entre 2500.

Para ver por qué, imagine una muestra de 100 00 mujeres maltratadas. Concediendo el 1 entre 2500 que propone Dershowitz, 40 de estas mujeres morirán

a manos de sus maltratadores en un año determinado (ya que 100 00 dividido por 2500 es igual a 40). También esperamos que 3 mujeres más, de media, sean asesinadas por otra persona (esta estimación está basada en una estadística aparecida en un informe policial acerca de mujeres asesinadas en 1992)[107]. Por lo tanto, de las 43 víctimas de asesinato, 40 de ellas fueron asesinadas por sus maltratadores. En otras palabras, el maltratador era el asesino el 93 por ciento de las veces.

No confunda esta cifra con la probabilidad de que Simpson fuera culpable. Esa probabilidad depende de muchas otras pruebas, a favor y en contra, como las que presentó la defensa, alegando que la policía incriminó a Simpson, o las que aportó la fiscalía, alegando que Simpson y el asesino compartían el mismo estilo de zapatos, guantes y ADN.

¿La probabilidad de que alguno de estos datos cambie su opinión acerca del veredicto? Cero.

§24. Desenredando la Red

Hace mucho tiempo, en los oscuros días que precedieron al surgimiento de Google, la búsqueda en Internet era un ejercicio de frustración[108]. Las páginas sugeridas por los antiguos motores de búsqueda solían ser irrelevantes, mientras que las interesantes, o estaban sepultadas al fondo de la lista, o ni siquiera aparecían.

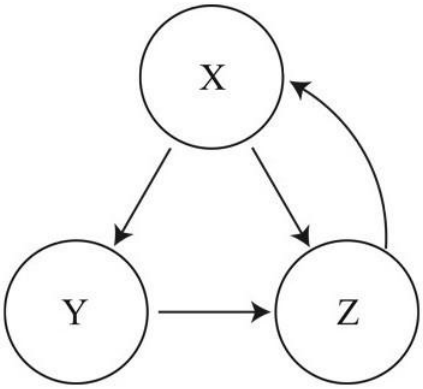
Algoritmos basados en el análisis de enlaces resolvieron el problema con una idea tan paradójica como un koan zen: un motor de búsqueda debe encontrar las mejores páginas. ¿Y qué es lo que convierte una página en buena, pequeño Saltamontes?[109]. Una página es buena si la enlazan buenas páginas.

Suena a razonamiento circular[110], y lo es, por eso es tan profundo. Lidiando con este círculo hasta hacerlo beneficioso, vemos que el análisis de enlaces ofrece una solución jiu-jitsu a las búsquedas en la Red.

El enfoque se eleva sobre ideas del álgebra lineal[111], el estudio de vectores y matrices. Tanto si desea detectar patrones en grandes conjuntos de datos o realizar cálculos gigantescos con millones de variables, el álgebra lineal tiene las herramientas que necesita[112]. Además de apuntalar el algoritmo de Google que clasifica las páginas (PageRank)[113], ha ayudado a que los científicos clasifiquen rostros humanos[114], analicen los patrones de votación de los magistrados del Tribunal Supremo[115] y ganen el premio del millón de dólares de Netflix[116]

(concedido a la persona o equipo que pueda mejorar, en más de un 10 por ciento, el sistema de recomendación de películas de Netflix).

Para estudiar un caso de álgebra lineal, veamos cómo funciona PageRank. Y para extraer su esencia con el mínimo alboroto, imaginemos una Red de juguete que solo tiene tres páginas, todas conectadas de la siguiente manera:



Las flechas indican que la página X contiene un enlace a la página Y, pero Y no devuelve el favor. En lugar de eso, Y enlaza a Z. Mientras tanto, X y Z se acogen al principio del «hoy por ti mañana por mí» y se enlazan entre sí en un frenesí digital.

En esta pequeña Red, ¿qué página es la más importante y cuál la menos importante? Podría pensarse que no hay suficiente información para deducirlo, puesto que no sabemos nada acerca del contenido de las páginas, pero ese un pensamiento de la vieja escuela. Preocuparse por el contenido ha resultado ser un camino poco práctico para la clasificación de páginas web. Los ordenadores no sabían hacerlo y los jueces humanos nos podían aguantar el ritmo de la avalancha de miles de páginas agregadas cada día.

El enfoque adoptado por Larry Page y Sergey Brin, los alumnos de posgrado que fundaron Google, era que las páginas web se clasificaran a sí mismas en función de sus enlaces. En el ejemplo anterior, las páginas X e Y enlazan a Z, lo que hace de Z la única página con dos enlaces entrantes, por lo que es la página más famosa del universo. Eso debería valer para algo; sin embargo, si estos enlaces vienen de páginas de dudosa calidad, eso jugará en su contra. La popularidad no significa nada en sí. Lo que importa es tener enlaces de páginas *buenas*.

Lo cual nos lleva de nuevo al enigma del círculo: una página es buena si la enlazan buenas páginas, pero ¿quién decide qué páginas son buenas?

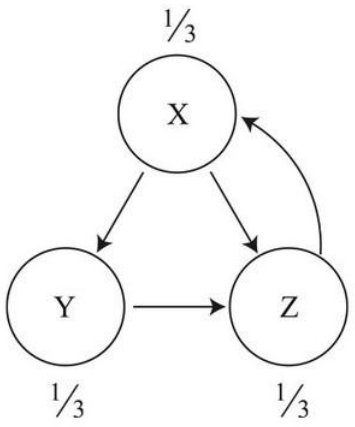
Lo hace la red. Y he aquí cómo[117].

El algoritmo de Google asigna a cada página una puntuación fraccionada entre 0 y 1. Esa puntuación se denomina «PageRank». Mide lo importante que es la página en relación con las otras, computando la proporción de tiempo que un internauta le dedica. Siempre que sea posible elegir entre más de un enlace saliente, el internauta selecciona uno al azar, con probabilidades iguales. Según esta interpretación, las páginas se consideran más importantes si se visitan con más frecuencia (por este internauta idealizado, no por el tráfico real de la Red).

Y como los PageRanks se definen como proporciones, tienen que sumar 1 al sumarse toda la red. Esta norma de conservación sugiere otra manera, quizá más palpable, de visualizar PageRank. Imagínela como un fluido, una sustancia acuosa que fluye a través de la red, alejándose de páginas malas y agrupándose con las buenas. El algoritmo busca determinar cómo se distribuye este fluido, a largo plazo, a través de la red.

La respuesta surge de un inteligente proceso interactivo. El algoritmo comienza con una suposición, luego actualiza todos los PageRanks repartiendo el líquido en partes iguales entre los enlaces salientes y sigue haciéndolo durante una serie de rondas, hasta que todo se tranquiliza y todas las páginas tienen sus cuotas legítimas.

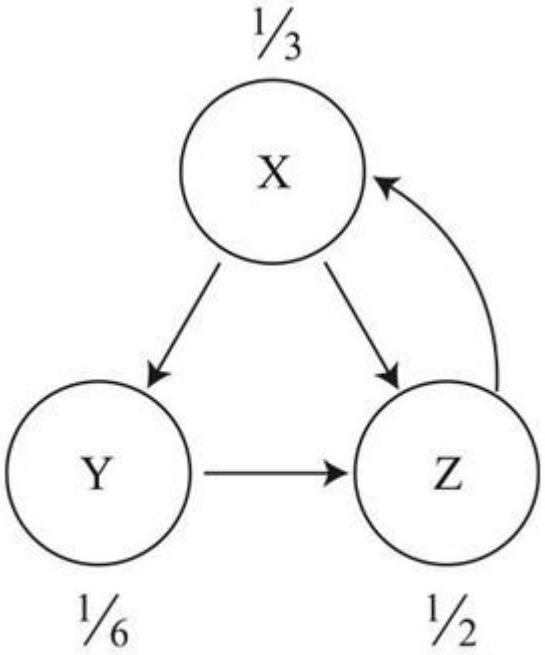
Inicialmente, el algoritmo adopta una postura igualitaria. Da a cada página una porción igual de PageRank. Puesto que en nuestro ejemplo hay tres páginas, cada página comienza con una puntuación de $1/3$.



Valor inicial de PageRank

A continuación, estos resultados se actualizan para reflejar mejor la verdadera importancia de cada página. La regla es que cada página toma su PageRank de la última ronda y lo divide en partes iguales entre las páginas que enlaza. Por tanto,

tras una ronda, el valor actualizado de X seguiría igualando $\frac{1}{3}$, porque ese es el PageRank que recibe de Z, la única página que la enlaza. Pero la puntuación de Y cae a un mísero $\frac{1}{6}$, al recibir solamente la mitad del PageRank de X de la ronda anterior. La otra mitad llega a Z, convirtiéndola en la gran triunfadora, ya que además de $\frac{1}{6}$ que recibe de X, recibe $\frac{1}{3}$ entero de Y, sumando un total de $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, tras una ronda, los valores de PageRank son los siguientes:



Valores de PageRank
después de la actualización

En las rondas siguientes, la regla de actualización es la misma. Si escribimos (x, y, z) para las puntuaciones actuales de las páginas X, Y y Z, los resultados actualizados serían:

$$x' = z$$

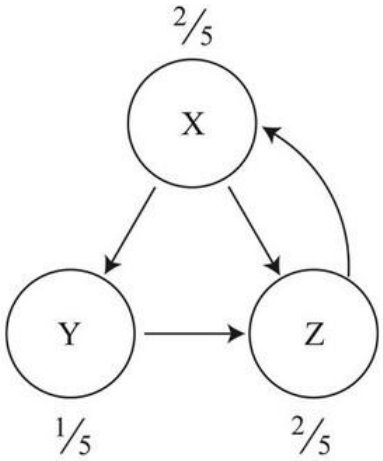
$$y' = 1/2\, x$$

$$z' = 1/2\, x + y$$

El símbolo primo en el superíndice indica que ha habido una actualización. Este tipo de cálculo iterativo es fácil de hacer en una hoja de cálculo (incluso a mano, para una red tan pequeña como la que estamos estudiando).

Tras diez iteraciones, nos percatamos de que los números no cambian demasiado de una ronda a la siguiente. Para entonces, X tiene un 40,6 por ciento del PageRank total, Y tiene un 19,8 por ciento y Z tiene un 39,6 por ciento. Esos números se parecen sospechosamente al 40, 20 y 40 por ciento, lo que sugiere que el algoritmo está convergiendo a esos valores.

De hecho, es correcto. Estos valores limitantes son lo que el algoritmo de Google definiría como *los* PageRanks para la red.



Valores limitantes de PageRank

Esto implica que *X* y *Z* son páginas igualmente importantes, aunque *Z* tenga el doble de enlaces entrantes. Esto tiene sentido: *X* es igual de importante que *Z* porque obtiene el respaldo total de *Z*, pero le retribuye solo la mitad de respaldo. La otra mitad se la envía a *Y*. Esto explica también por qué Y solo consigue la mitad que *X* y *Z*.

Sorprendentemente, estas puntuaciones pueden obtenerse de manera directa, sin pasar por la iteración. Piense en las condiciones que definen el estado estacionario. Si nada cambia tras una actualización, debemos tener $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$. Así que sustituya las variables primadas en las ecuaciones por las actualizadas con sus contrapartes no primadas para obtener:

$$x = z$$

$$y = 1/2\, x$$

$$z = 1/2\, x + y$$

Y este sistema de ecuaciones puede ser resuelto de manera simultánea para obtener $x = 2y = z$. Finalmente, puesto que estas puntuaciones deben sumar 1, concluimos que $x = 2/5$, $y = 1/5$, y $z = 2/5$, de acuerdo con los porcentajes anteriores.

Demos un paso atrás y veamos cómo encaja todo esto en el amplio contexto del álgebra lineal. Las ecuaciones de estado estacionario anteriores, así como las ecuaciones de actualización con los valores primados, son ejemplos típicos de ecuaciones lineales. Se llaman lineales porque se relacionan con líneas. Las variables x, y, z aparecen solo elevadas a la primera potencia, tal y como aparecen en la conocida ecuación de la línea recta, $y = mx + b$, un básico de los cursos de álgebra del instituto.

Las ecuaciones lineales, en contraposición a aquellas que contienen términos no lineales, como x^2 o yz o sen x, son, comparativamente, sencillas de resolver. El reto surge cuando están implicadas un número enorme de variables, como sucede en la Red real. Una de las labores principales del álgebra lineal, por tanto, es desarrollar algoritmos cada vez más rápidos para resolver grandes conjuntos de ecuaciones. Incluso las pequeñas mejoras tienen ramificaciones para todo, desde la programación de una aerolínea a la compresión de imágenes.

Pero el triunfo mayor del álgebra lineal, desde el punto de vista del impacto en el mundo real, es sin duda su solución para el enigma zen de clasificar páginas web. «Una página es buena en la medida en que la enlacen buenas páginas». Traducido en símbolos, este criterio se convierte en las ecuaciones PageRank.

Google ha llegado donde está por resolver las mismas ecuaciones que hemos tratado aquí —simplemente con unos pocos miles de millones más de variables… y de beneficios.

Sexta Parte
Fronteras

Contenido:

§25. Los números más solitarios
§26. Pensamiento en grupo
§27. Cintas musicales
§28. Piense globalmente
§29. Análisis. Historia de una terapia peligrosa
§30. El hotel infinito de Hilbert

§25. Los números más solitarios

Según una memorable canción de los sesenta, el uno es el número más solitario[118] y el dos puede ser tan malo como el uno. Quizá sea cierto, pero los números primos también lo tienen difícil.

Paolo Giordano explica por qué en su exitosa novela *La soledad de los números primos*[119]. Es la melancólica historia de amor de dos inadaptados, dos números primos, llamados Mattia y Alice, ambos marcados por tragedias infantiles que les han hecho incapaces de conectar con otras personas, pero que sienten en el otro un espíritu afín dañado. Giordano escribe:

> *Los números primos solo son divisibles por 1 y por sí mismos. Ocupan su lugar en la serie infinita de números naturales apretados, como todos los números, entre otros dos, pero más alejados que el resto. Son números sospechosos, solitarios y es por lo que Mattia los consideraba maravillosos. Alguna vez pensó que habían ido a parar a esa secuencia por error, que habían quedado atrapados, como perlas ensartadas en un collar. Otras veces sospechaba que quizá les hubiera gustado ser como los otros, simplemente números ordinarios, pero por alguna razón no podía ser. […]*

En su primer año de universidad, Mattia había aprendido que entre los números primos existen algunos que son todavía más especiales. Los matemáticos los llaman números primos gemelos: números primos que están cerca, son casi vecinos, aunque entre ellos siempre hay un número par que les impide verdaderamente tocarse. Números como 11 y 13, 17 y 19, 41 y 43. Si tiene la paciencia de seguir contando, verá que estas parejas son cada vez más escasas. A

medida que incrementan los números, los primos van quedando más aislados, perdidos en ese espacio medido y silencioso compuesto solo de cifras, y le invadirá un angustioso presentimiento de que las parejas encontradas hasta entonces eran accidentales, que la soledad es el verdadero destino. Entonces, justo cuando está a punto de rendirse, cuando ya no tiene ganas de seguir contando, se cruza con otros gemelos, agarrándose con fuerza el uno al otro. Existe una convicción común entre los matemáticos que establece que por muy lejos que vaya, siempre habrá otros dos, aunque nadie puede decir con exactitud dónde, hasta que son descubiertos.

Mattia pensó que tanto él como Alice eran así, primos gemelos, solos y perdidos, pero no lo suficientemente cerca para verdaderamente tocarse.

Me gustaría explorar algunas de las bellas ideas que aparecen en el pasaje anterior, especialmente en su relación con la soledad de los números primos y primos gemelos. Estos asuntos son capitales para la teoría de números[120], la materia que se ocupa del estudio de los números enteros y sus propiedades y que suele describirse como la parte más pura de las matemáticas.

Antes de ascender adonde falta el aire, permítame que me deshaga de una pregunta que suele surgirle a las personas de mentalidad práctica: ¿la teoría de números sirve para algo? Sí. Casi a su pesar, la teoría de números proporciona la base de los algoritmos encriptados[121] que se utilizan millones de veces al día para asegurar transacciones con tarjeta de crédito por Internet y para codificar comunicados militares secretos. Estos algoritmos dependen de la dificultad de descomponer un número enorme en sus factores primarios.

Pero esta no es la razón por la que los matemáticos están obsesionados con los números primos. La verdadera razón es que son fundamentales. Son los átomos de la aritmética. Tal y como sugiere el origen griego de la palabra «átomo», los números primos son «a-tómicos», es decir, indivisibles. Y al igual que todo está compuesto de átomos, cada número está compuesto de primos. Por ejemplo, 60 es igual a $2 \times 2 \times 3 \times 5$. Decimos que 60 es un número compuesto con factores primos de 2 (por partida doble), 3 y 5.

¿Y qué hay del 1? ¿Es primo? No, no lo es, y cuando entienda por qué no lo es empezará a apreciar por qué el 1 es realmente el número más solitario, incluso más solitario que los primos.

No merece ser excluido. Dado que 1 es divisible solo por 1 y por sí mismo, realmente debería ser considerado un número primo, y durante muchos años lo fue. Pero los matemáticos modernos han decidido excluirlo, simplemente por

conveniencia. Si se permitiera la entrada del 1, estropearía un teorema que nos gustaría que fuera cierto. En otras palabras, hemos amañado la definición de número primo para lograr el teorema que queremos.

El teorema deseado dice que cualquier número puede ser factorizado en números primos de manera *única*. Pero si el 1 se considerara primo, la unicidad de la factorización de números primos fallaría. Por ejemplo, 6 sería 2 × 3, pero también sería 1 × 2 × 3 y 1 × 1 × 2 × 3, etcétera, y todas estas expresiones tendrían que aceptarse como distintas maneras de factorización de primos. Ridículo, por supuesto, pero es con lo que tendríamos que lidiar si se permitiera la entrada del 1.

Esta pequeña y sórdida historia es instructiva; nos muestra cómo se desarrolla a veces la matemática. La visión ingenua es considerar que hacemos nuestras definiciones, las grabamos en piedra y luego deducimos los teoremas que se sigan de ellas. No es así. Eso sería demasiado pasivo. Estamos al mando y podemos alterar las definiciones según nos plazca, especialmente si un leve pellizco conduce a un teorema más ordenado, como sucede en este caso.

Ahora que el 1 ha sido arrojado a los bajos del autobús, echemos un vistazo al resto, los números primos de pleno derecho. Lo más importante es saber lo misteriosos que son, lo extraños e inescrutables. Nadie ha encontrado jamás una fórmula exacta para los números primos. A diferencia de verdaderos átomos, no siguen un patrón simple, nada parecido a la tabla periódica de los elementos.

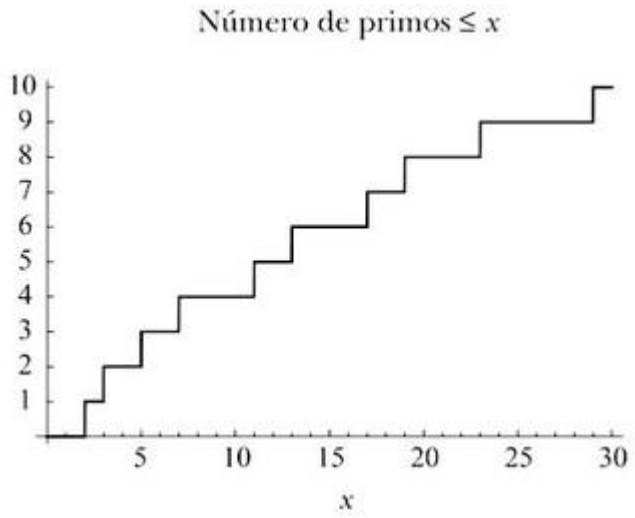
Ya puede ver las señales de peligro en los diez primeros primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. De buenas a primeras, las cosas empiezan mal con ese 2. Es un friki, un inadaptado entre inadaptados, el único primo con la vergüenza de ser par. No sorprende que sea «the loneliest number since the number one» [el número más solitario desde el número uno], como dice la canción.

Aparte del 2, el resto de primos son todos impares…, pero aun así peculiares. Observe los huecos entre ellos. A veces están a dos espacios (como 5 y 7), otras a cuatro (13 y 17) y otras a seis (23 y 29).

Para subrayar aún más lo desordenados que son los números primos, compárelos con sus parientes, los números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13… Los huecos entre números impares son siempre constantes: dos espacios, estable como un toque de tambor. Obedecen a una fórmula simple: el número impar n es $2n - 1$. Los números primos, por otra parte, marchan al ritmo de su propio tambor, a un ritmo que nadie más percibe.

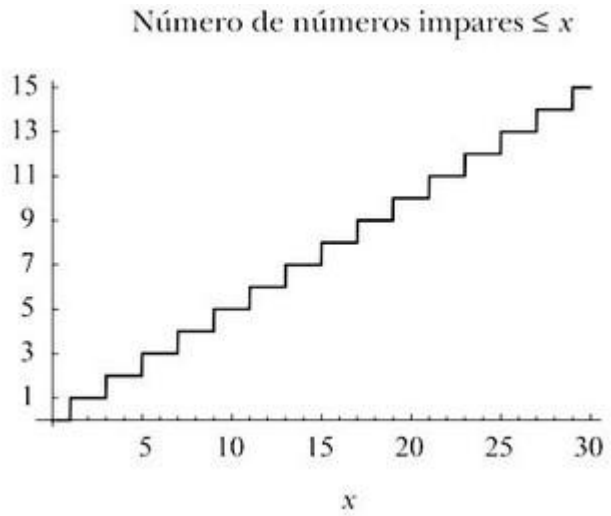
Dadas las irregularidades en la ubicación de los primos, los teóricos de los números han recurrido a mirarlos estadísticamente, como miembros de un conjunto, en lugar de insistir en su idiosincrasia. Concretamente, preguntemos cómo se distribuyen entre los números enteros ordinarios. ¿Cuántos números primos son inferiores o iguales a 10? ¿O a 100? ¿O a un número arbitrario *N?* Esta construcción es paralela al concepto estadístico de distribución acumulativa.

Imagine que cuenta los números primos a medida que camina entre ellos, como un antropólogo que realiza un censo. Imagínelos de pie en el eje de *x*. Comienza en el número 1 y empieza a caminar hacia la derecha, haciendo recuento sobre la marcha. El total acumulado se parece a esto:



Los valores en el eje de *y* muestran cuántos primos lleva contados en el momento que llega a un punto concreto del eje *x*. Para todos los valores de *x* inferiores a 2, la gráfica de *y* se queda en 0, puesto que no se ha contado aún ningún primo. El primero aparece en $x = 2$. En ese momento, el gráfico pega un salto (¡Tengo uno!). Luego permanece plano hasta llegar a $x = 3$, donde da un nuevo salto. La alternancia de saltos y planicies forma una escalinata extraña e irregular. Los matemáticos la llaman la función de conteo de los números primos.

Compare esa imagen con su homóloga de los números impares.

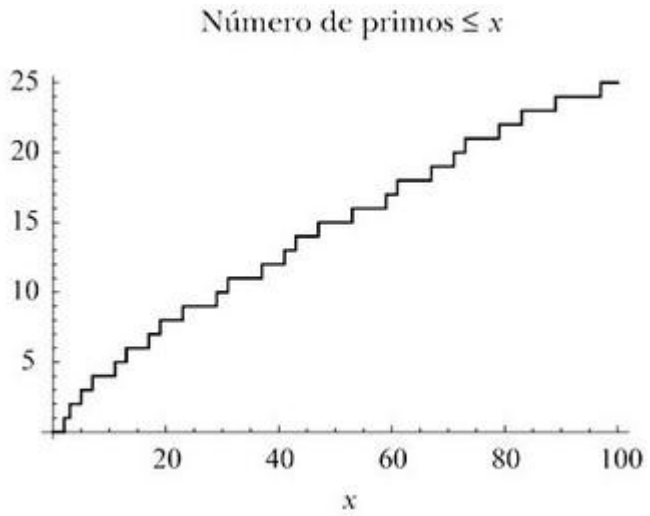


Ahora la escalera es perfectamente regular, sigue una tendencia cuya pendiente es 1/2. Eso es porque el espacio entre números impares es siempre 2.

¿Hay alguna esperanza de encontrar algo parecido para los números primos, a pesar de su carácter errático? Milagrosamente, sí. La clave es centrarse en la tendencia, no en los detalles de la escalera. Si alejamos la imagen, de la confusión comienza a emerger una curva. He aquí la gráfica de la función contante para todos los primos hasta el número 100.

Ahora los escalones nos distraen menos. La curva parece incluso más suave si contamos todos los primos hasta mil millones.

Primera impresión desmentida, esta curva *no* es realmente una línea recta. Cae ligeramente a medida que asciende. Sus caídas significan que los primos, efectivamente, son cada vez *menos comunes*. Están más aislados. Esto es a lo que Giordano llamaba «la soledad de los números primos».



Este declive se hace evidente si nos fijamos en los datos del censo desde otro ángulo. Recordará que contamos diez primos en los primeros treinta números enteros. Por lo tanto, al principio de la línea, uno de cada tres números es primo, es decir, todo un 33 por ciento de la población. Pero entre los primeros cien, solo veinticinco son primos. Se han reducido a uno de cada cuatro, un preocupante 25 por ciento. Y entre los primeros mil millones de números, solo un mero 5 por ciento son primos.

Ese es el mensaje sombrío de la curva que cae. Los números primos son una especie en extinción. Nunca mueren del todo —sabemos desde tiempos de Euclides que son infinitos—, pero se desdibujan en el olvido.

Los teóricos han cuantificado lo desolados que realmente están los números primos hallando funciones que se acercan a esta curva, tal y como lo muestra una fórmula que expresa el espacio entre ellos. Si N es un número grande, el espacio medio entre los primos cercanos a N es, aproximadamente, igual a $\ln N$, el logaritmo natural de N. (El logaritmo natural se comporta como el logaritmo ordinario que se estudia en bachillerato, salvo que se basa en el número e, en lugar de en 10. Es natural en el sentido de que aparece por todas partes en matemáticas avanzadas, por ser parte del séquito de e. Para más información acerca de la ubicuidad de e, véase el capítulo 19).

Aunque la fórmula $\ln N$ para la expresión del espacio entre primos no funciona demasiado bien cuando N es pequeño, mejora en el sentido de que su porcentaje de error llega a cero a medida que N se acerca al infinito. Para tener una idea de los números involucrados, supongamos que $N = 100$. Resulta que hay 168 números

primos inferiores a 100, por lo que el espacio medio entre ellos en esta sección de la línea numérica es 100/68, o aproximadamente 5,9. Por comparación, la fórmula predice un espacio medio de ln(100) ≈ 6,9, es decir, se excede en un 17 por ciento. Pero cuando llegamos mucho más lejos, por ejemplo a N = 1 00 00 00, los espacios reales y predichos son 19,7 y 20,7 respectivamente, una sobreestimación de solo el 5 por ciento.

La validez de la fórmula ln$N$ a medida que N tiende al infinito se conoce hoy como el teorema de los números primos[122]. Lo advirtió por primera vez (aunque no se publicó) Carl Friedrich Gauss[123] en 1792, cuando tenía quince años. (¿Ve lo que puede hacer un joven cuando no le distrae una Xbox?).

Respecto a los otros adolescentes del capítulo, Mattia y Alice, espero que usted pueda apreciar lo conmovedor que es que los números primos gemelos sigan existiendo[124] en los confines de la línea numérica, «ese espacio medido y silencioso compuesto solo de cifras». Tienen las probabilidades en contra. De acuerdo con el teorema de los números primos, cualquier primo cercano a N no tiene derecho a esperar un posible compañero mucho más cerca de N de lo que dicte ln$N$, un abismo mucho mayor que 2 cuando N es grande.

Aun así, muchas parejas vencen a la probabilidad. Los ordenadores han encontrado primos gemelos en lugares increíblemente remotos de la línea numérica. La pareja más grande que se conoce la forman dos números con 100 355 decimales cada uno, acurrucados en la oscuridad.

La conjetura de los primos gemelos afirma que siempre aparecerán parejas como esta.

Pero, en lo que respecta a encontrar una pareja de primos cerca[125] para una partidito de dobles…, buena suerte.

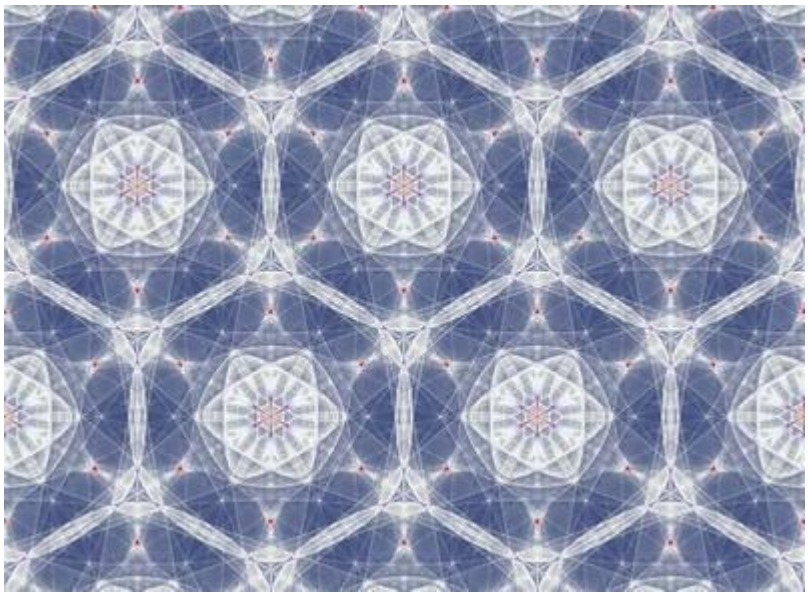
§26. Pensamiento en grupo

Mi mujer y yo tenemos estilos de dormir distintos, y nuestro colchón es la prueba. Ella acapara las almohadas, se revuelve durante toda la noche y apenas hace mella en el colchón. Yo, sin embargo, me tumbo boca arriba, como una momia, dando forma a una vaguada cavernosa en mi lado de la cama.

Los fabricantes de camas recomiendan dar la vuelta al colchón periódicamente, probablemente pensando en gente como yo. Pero ¿cuál es el mejor sistema? ¿Cómo se supone que hay que darle la vuelta para desgastarlo equitativamente?

Brian Hayes explora este problema en el ensayo que da título a su libro *Group Theory in the Bedroom* [Teoría de grupos en el dormitorio]. Dejando a un lado los dobles sentidos, el «grupo» en discusión es un conjunto de acciones matemáticas: todas las formas posibles de voltear o rotar el colchón de tal manera que siga encajando perfectamente en la estructura de la cama.

Fijándonos en las matemáticas de colchón[126] con cierto detalle, espero poder ofrecer una idea general de la teoría de grupos[127]. Es una de las partes más versátiles de las matemáticas. Abarca desde la coreografía de un baile de salón y las leyes fundamentales de la física de partículas a los mosaicos de la Alhambra y sus caóticas contrapartes[128], como esta imagen:



Study for Alhambra Stars (200) / Mike Field

Como indican estos ejemplos, la teoría de grupos une las artes y las ciencias. Se ocupa de algo que ambas culturas comparten, la fascinación por la simetría. Pero debido a que abarca una amplia gama de fenómenos, la teoría de grupos es necesariamente abstracta. Destila simetría en su esencia.

Normalmente pensamos que la simetría es propiedad de una forma. Pero la teoría de grupos se ocupa más de aquello que se le puede *hacer* a una forma —concretamente, todas las maneras en que puede cambiarse dejando otra parte igual—. Es decir, busca todas las transformaciones que dejan a una forma inalterada, dadas ciertas restricciones. Estas transformaciones se llaman simetrías de la forma. Al juntarlas forman un grupo, una colección de transformaciones cuyas relaciones definen la arquitectura más básica de la forma.

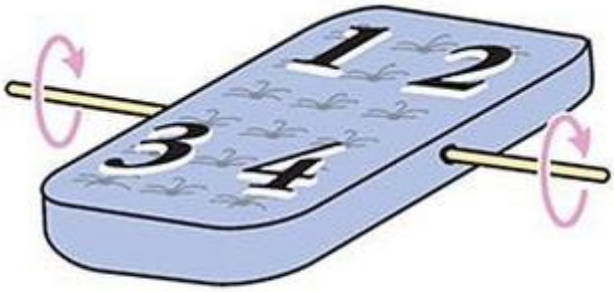
En el caso de un colchón, las transformaciones alteran su orientación en el espacio (eso es lo que cambia) mientras que mantienen su rigidez (esa es la restricción). Y cuando la transformación ha terminado, el colchón debe encajar cómodamente en la estructura rectangular de la cama (eso es lo que permanece igual). Asentadas estas reglas, veamos qué transformaciones cumplen los requisitos para formar parte de este exclusivo grupo. Resulta que solo hay cuatro.

La primera transformación es la de «no haga nada», una opción perezosa pero muy común que consiste en dejar el colchón intacto. Ciertamente, cumple con todas las normas, pero no es de mucha utilidad a la hora de prolongar la vida de su colchón. Aun así, es importante incluirla en el grupo. Tiene el mismo papel en la teoría de grupos que el 0 en la suma de números, o que el 1 en la multiplicación. Los matemáticos lo llaman elemento identitario, así que lo denotaremos con el símbolo *I*.

Ahora vienen las tres formas genuinas de voltear un colchón. Para distinguirlas, es útil numerar las esquinas así:

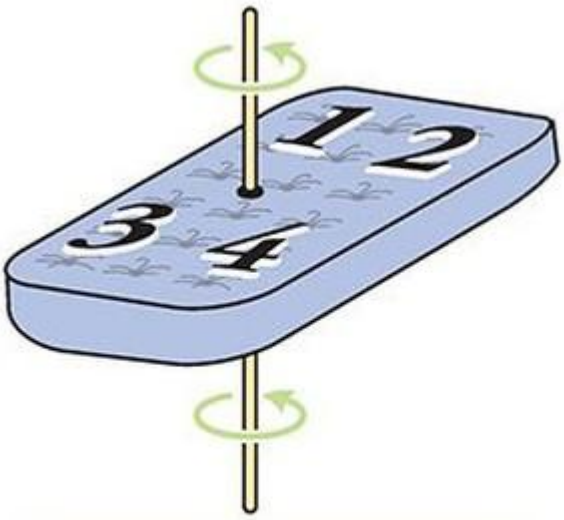
El primer tipo de vuelta se representa al comienzo de este capítulo. El apuesto hombre del pijama de rayas está intentando voltear el colchón de lado a lado, rotándolo 180 grados alrededor del eje largo, en un movimiento que llamaremos *H*, «vuelta horizontal».

Una forma más imprudente de girar el colchón es en vertical, *V*. Esta maniobra intercambia pies y cabeza. Debe poner en pie el colchón, en posición vertical, de tal manera que casi toque el techo, y tumbarlo. El efecto neto, además del estruendo, es que el colchón gira 180 grados sobre su eje lateral, como se muestra a continuación:



Vuelta vertical

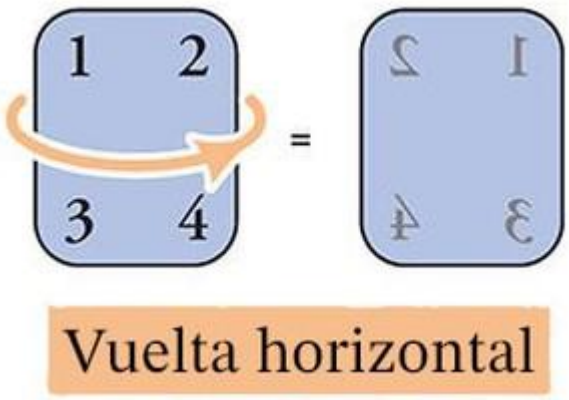
La última posibilidad es girar el colchón mientras se mantiene sobre la cama.



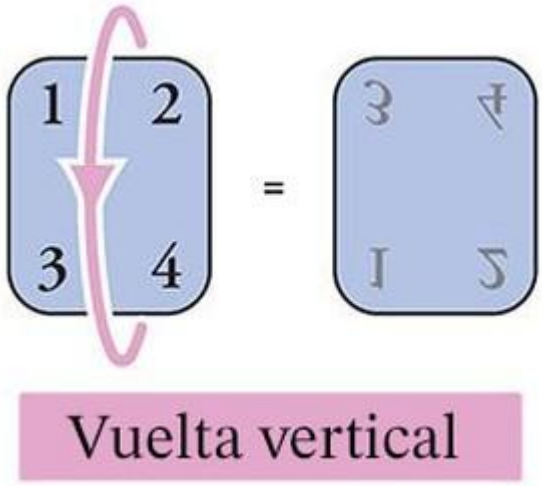
Rotación

A diferencia de *H* y *V*, esta rotación, *R*, mantiene arriba la parte superior del colchón.

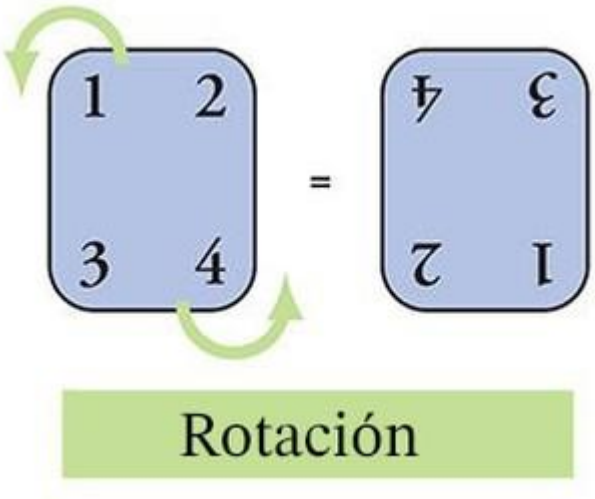
Esa diferencia se aprecia si miramos el colchón —imaginando que es translúcido— desde arriba e inspeccionamos los números de las esquinas tras cada una de las posibles transformaciones. La vuelta horizontal muestra los números como si se reflejaran en un espejo. También los permuta: 1 y 2 intercambian el puesto, así como 3 y 4.



El giro vertical permuta los números de manera distinta, y además de reflejarlos, los pone patas arriba.

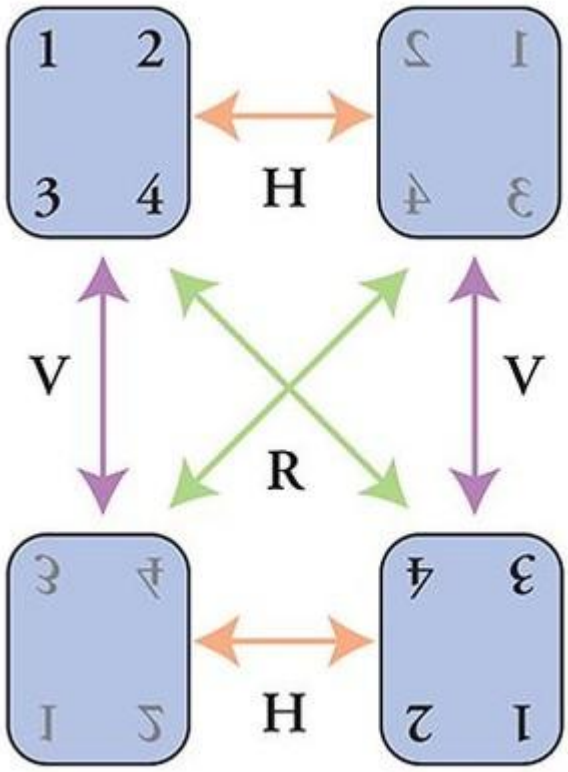


La rotación, sin embargo, no genera reflejos. Simplemente pone los números al revés, intercambiando el 1 por el 4 y el 2 por el 3.



Estos detalles no son lo principal. Lo que importa es la manera en que se relacionan entre sí las transformaciones. Sus patrones de interacción codifican la simetría del colchón.

Para descifrar dichos patrones con un mínimo esfuerzo, es útil dibujar el diagrama siguiente. (Este tipo de imágenes abunda en un libro magnífico llamado *Visual Group Theory* [Teoría de grupos visual], de Nathan Carter. Es una de las mejores introducciones a la teoría de grupos —o a cualquier rama de la matemática avanzada— que he leído).



Los cuatro posibles estados del colchón se muestran en las esquinas del diagrama. La esquina superior izquierda es el punto de partida. Las flechas indican los movimientos que llevan el colchón de un estado a otro.

Por ejemplo, la flecha que apunta desde la esquina superior izquierda hacia la inferior derecha representa la acción de la rotación *R*. La flecha tiene también punta en el otro extremo, porque realizar *R* dos veces es equivalente a no hacer nada.

Esto no debería sorprendernos. Simplemente significa que dar la vuelta al colchón y luego realizar el mismo movimiento, lo devuelve a su posición original. Podemos resumir esta propiedad con la ecuación $RR = I$, donde RR significa «haga *R* dos veces», siendo *I* el elemento identitario («no haga nada»). Las transformaciones horizontal y vertical también se deshacen a sí mismas: $HH = I$ y $VV = I$.

El diagrama encarna una gran cantidad de información adicional. Por ejemplo, muestra que el temerario giro vertical, *V*, es equivalente a *HR*, un giro horizontal seguido de una rotación —un camino mucho más seguro para un mismo resultado—. Para comprobarlo, comience en la posición inicial por la esquina superior izquierda, con la cabecera hacia el este, sobre *H*, hacia la siguiente

posición y desde allí en diagonal, hacia el sureste sobre *R*. Debido a que llega a la misma posición a la que hubiera llegado de seguir *V*, se demuestra que $HR = V$[129].

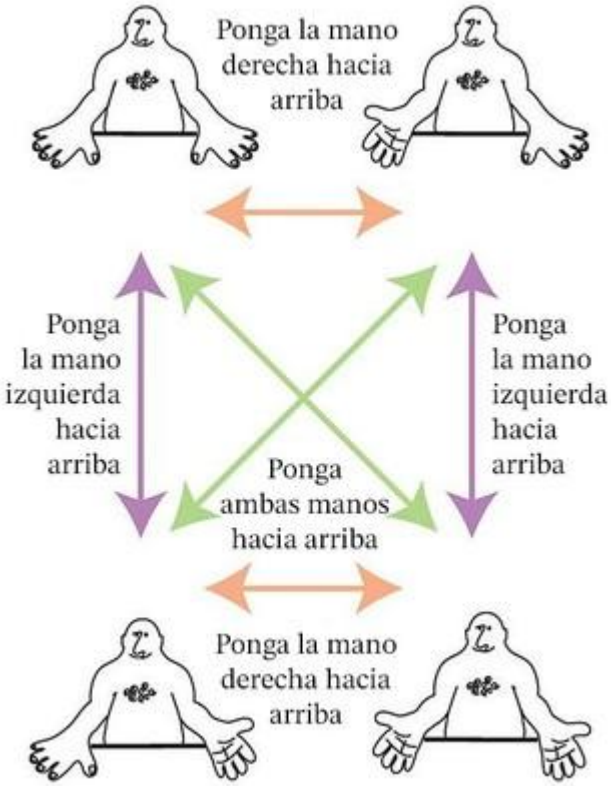
Fíjese en que el orden de esas acciones es irrelevante: $HR = RH$, pues ambas conducen a *V*. Esta indiferencia respecto al orden se da en cualquier otro par de acciones. Debería pensarlo como una generalización de la propiedad conmutativa de la suma de números ordinarios, *x* e *y*, según la cual $x + y = y + x$. Pero cuidado, el grupo del colchón es especial. Muchos otros grupos incumplen la propiedad conmutativa. Aquellos que tienen la suerte de cumplirla son particularmente limpios y simples.

Ahora, la recompensa. El diagrama muestra cómo sacarle el mayor partido a un colchón. Cualquier estrategia que emplee los cuatro estados periódicamente funcionará. Por ejemplo, alternar *R* y *H* es conveniente, y, puesto que no pasa por *V*, no es demasiado extenuante. Para ayudarle a recordar, algunos fabricantes sugieren la fórmula: «Gire en primavera, voltee en otoño».

El grupo de colchones también aparece de repente en lugares inesperados: en la simetría de las moléculas de agua o en la lógica de un par de interruptores eléctricos. Ese es uno de los encantos de la teoría de grupos. Expone la unidad oculta de cosas que de otra manera parecerían inconexas… como en aquella anécdota de cómo el físico Richard Feynman logró aplazar su reclutamiento[130].

El psiquiatra del ejército que le entrevistaba le pidió que le mostrara las manos para que pudiera examinarlas. Feynman sacó las manos, una con la palma hacia arriba y la otra hacia abajo. «No, al revés», dijo el psiquiatra. Por lo que Feynman invirtió *ambas* manos, dejando, de nuevo, una palma hacia arriba y la otra hacia abajo.

Feynman no estaba planteando un acertijo, sino proponiendo un poco de humor a propósito de la teoría de grupos. Si tenemos en cuenta todas las posibilidades en que puede mostrar sus manos, así como las múltiples transiciones que puede llevar a cabo, las flechas forman el mismo patrón que el grupo de colchones.



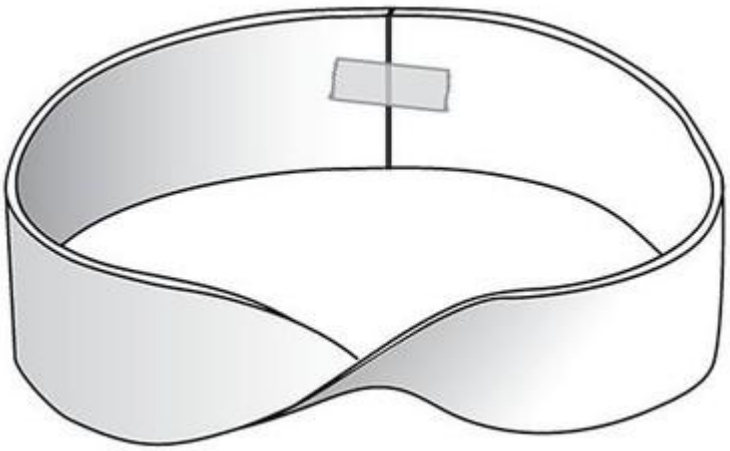
Pero si todo esto hace que los colchones parezcan demasiado complicados, tal vez la verdadera lección es una que ya conocía: si algo le inquieta, consúltelo con la almohada.

§27. Cintas musicales

Nuestra escuela primaria local invita a los padres a acercarse y hablar a las clases de sus hijos. Esto da a los niños la oportunidad de oír charlar sobre diferentes trabajos y de aprender cosas a las que, de otra manera, tal vez no tuvieran acceso.

Cuando llegó mi turno, me presenté en la clase de primero de primaria de mi hija con una bolsa llena de cintas de Möbius[131]. La noche anterior, mi mujer y yo habíamos cortado tiras de papel y les habíamos dado una media vuelta a cada una, así:

Antes de unir los bordes para formar una cinta de Möbius:



Los niños de seis años pueden hacer actividades divertidas con estas formas[132], que requieren nada más que tijeras, rotuladores, papel celo y algo de curiosidad.

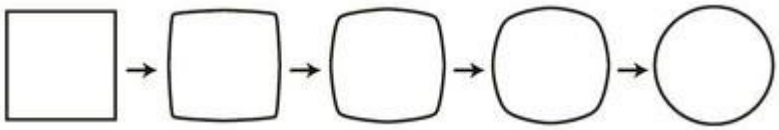
Mientras que mi mujer y yo repartíamos las tiras y los materiales, el profesor preguntó a los alumnos en qué asignatura les parecía que estábamos. Un niño levantó la mano y dijo: «No estoy seguro, pero sé que no es lengua».

Por supuesto, el profesor esperaba que respondieran «plástica», o, de manera más precoz, «matemáticas». La mejor respuesta, no obstante, habría sido «topología»[133]. (En Ithaca es posible que a un alumno de primero se le ocurriera esa respuesta, pero ese año el niño topólogo resultó estar en otra clase).

¿Qué es la topología? Es una excitante rama de la matemática moderna, un brote de la geometría, pero mucho más ligera y relajada. En topología, dos formas se consideran iguales si se puede doblar, estirar o deformar de otro modo una para convertirla en la otra de manera continuada, por supuesto sin rasgaduras o perforaciones. A diferencia de la rigidez de los objetos geométricos, los objetos de topología se comportan como si fueran infinitamente elásticos, como si estuvieran hechos de un tipo de goma ideal o Silly Putty.

La topología arroja luz sobre las propiedades más profundas de una forma, propiedades que permanecen inalteradas tras continuas distorsiones. Por ejemplo, una goma elástica en forma de cuadrado y otra en forma circular son topológicamente indiscernibles. No importa que un cuadrado tenga cuatro esquinas y cuatro lados. Esas propiedades son irrelevantes. Una deformación puede

deshacerse de ellas redondeando las esquinas del cuadrado y doblando sus lados hasta hacerlos arcos circulares.

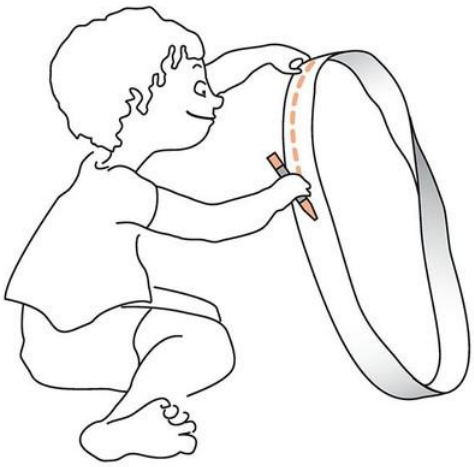


Pero de lo que no puede deshacerse esta deformación es del bucle intrínseco del círculo y el cuadrado[134]. Ambos son curvas cerradas. Esa es su esencia topológica compartida.

De la misma manera, la esencia de una tira de Möbius es el peculiar medio giro que lleva adherido. Ese giro dota a la forma de su seña de identidad. Es bien conocido que una cinta de Möbius tiene una sola cara y solo un borde. En otras palabras, sus superficies delantera y trasera son la misma, al igual que sus bordes superior e inferior. (Para comprobarlo, recorra con su dedo la cinta hasta que llegue al punto de partida). Lo que ha sucedido es que el giro ha enganchado lo que eran los bordes superior e inferior del papel creando una larga curva continua. Igualmente, fusiona las partes delantera y trasera. Una vez que la cinta se ha cerrado, estas cualidades son permanentes. Puede estirar y retorcer una cinta de Möbius todo lo que quiera, pero nada cambiará ese medio giro, ni esa cualidad de tener solo un lado y un borde.

Haciendo que los niños examinaran las extrañas propiedades de la cinta de Möbius, esperaba enseñarles lo divertidas y asombrosas que pueden ser las matemáticas.

En primer lugar les pedía que cogieran un rotulador y que con cuidado dibujaran una línea por toda la cinta. Con el ceño fruncido, comenzaron a trazar algo parecido a la línea de puntos de la imagen siguiente:



Tras un circuito, muchos alumnos se detuvieron y adoptaron una pose de perplejidad. Comenzaron a gritarse unos a otros excitados, puesto que sus líneas no se habían cerrado, tal y como esperaban. El rotulador no había llegado al punto de partida; ahora estaba al «otro» lado de la superficie. Esa fue la sorpresa número uno: hay que recorrer *dos veces* la cinta de Möbius para regresar al punto de partida.

De repente, un niño comenzó a perder los estribos. Cuando se percató de que su rotulador no había vuelto al punto de partida, supuso que había hecho algo mal. Aunque le aseguramos una y otra vez que eso es lo que tenía que pasar, que lo estaba haciendo muy bien y que debía recorrer de nuevo la cinta, no hubo forma. Era demasiado tarde. Estaba en el suelo, llorando desconsoladamente.

Con cierta inquietud, le pedí a la clase que probara la siguiente actividad. «¿Qué pensáis que sucederá si cogéis las tijeras y comenzáis a cortar limpiamente, por el medio, a lo largo de toda la cinta?».

«¡Se despedazará!», «¡Se convertirá en dos trozos!», decían. Pero cuando lo probaron y sucedió algo increíble (la tira se mantuvo de una pieza pero duplicó su tamaño), hubo incluso más gritos de asombro y alegría. Era como un truco de magia.

Después de eso, fue difícil que siguieran atentos. Estaban demasiado ocupados con sus propios experimentos, haciendo nuevos estilos de tiras de Möbius con dos o tres medios giros y cortándolas a lo largo en mitades, tercios o cuartos, generando todo tipo de formas retorcidas: collares, cadenas y nudos, mientras gritaban: «¡Mira lo que he descubierto!». Sin embargo, no he podido superar haber traumatizado a ese niño. Y parece ser que mi lección no fue la primera que hizo llorar a un alumno.

Vi Hart[135] estaba tan frustrada por las aburridas clases de matemáticas de su instituto que comenzó a garabatear en clase, pintando serpientes y árboles y cadenas infinitas de elefantes que encogían, en lugar de atender al profesor. Vi, que se llama a sí misma «matemúsica recreativa a tiempo completo», ha colgado algunos de sus garabatos en YouTube. Se han visto cientos de miles de veces y, en el caso de los elefantes, más de un millón. Ella y sus vídeos son asombrosamente originales.

Dos de mis preferidos subrayan las extrañas propiedades de las cintas de Möbius a través de un uso creativo de la música y las historias. En el menos desconcertante de los dos, su «Cajita de música Möbius», toca un tema de una pieza musical que compuso inspirada en los libros de Harry Potter.

Vi Hart

La melodía está codificada en una serie de agujeros perforados en una cinta que a continuación se introduce en una caja de música estándar. Su innovación fue retorcer los extremos de la cinta y unirlos formando una cinta de Möbius. Al girar la manivela de la caja de música, Vi va introduciendo la cinta en el aparato, que reproduce la melodía normalmente. Pero, transcurridos cincuenta segundos del vídeo, el bucle completa un circuito y, debido a la media vuelta en la tira de Möbius, la caja de música comienza a reproducir lo que originalmente estaba en el *dorso* de la cinta perforada, de arriba abajo. Por lo tanto, la melodía comienza de nuevo, en este caso con las notas invertidas. Las notas altas ahora son bajas y viceversa. Siguen sonando en el mismo orden, pero de arriba abajo, gracias a las volteretas impuestas por la estructura de Möbius.

Para dar un ejemplo aún más llamativo de las implicaciones de las tiras de Möbius, Vi cuenta en «Cuento de Möbius: Wind y el señor Ug», una historia agridulce acerca de un amor imposible. Una simpática triángulo llamada Wind, dibujada con un rotulador deleble, vive sin saberlo en un mundo plano hecho de acetato transparente con forma de cinta de Möbius. Se siente sola, pero esperanzada, ansiosa de conocer al otro único habitante del mundo, un misterioso caballero llamado señor Ug, que vive una puerta más abajo. Aunque no le conoce, ella adora los mensajes que le deja y anhela conocerle algún día.

Alerta de spoiler: sáltese el siguiente párrafo si no quiere saber la clave del cuento.

El señor Ug no existe. Wind es el señor Ug, visto de arriba abajo y en el dorso de la cinta transparente de Möbius. Debido a la manera inteligente en que Vi imprime letras y hace girar el mundo girando el acetato, cuando el nombre de Wind o su casa o sus mensajes dan una vuelta a la cinta de Möbius, se voltean y parecen pertenecer al señor Ug.

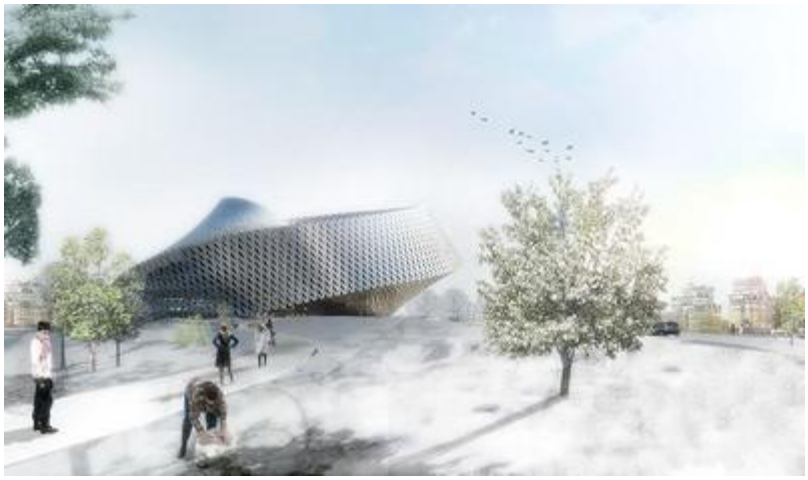
Vi Hart

Mi explicación no hace justicia al vídeo. Tiene que verlo para descubrir el gran ingenio que se emplea para combinar una historia de amor con una ilustración vívida de las propiedades de las cintas de Möbius.

Otros artistas también han obtenido inspiración de las desconcertantes características de las cintas de Möbius[136]. Escher las usó en sus dibujos de hormigas

atrapadas en un bucle eterno. Escultores y grabadores, como Max Bill y Keizo Ushio, han incorporado motivos de Möbius en sus obras.

Quizá, la estructura de Möbius más monumental sea la planeada para la Biblioteca Nacional de Kazajistán[137]. Su diseño, obra del estudio de arquitectura danés BIG, son pasillos en espiral que se enroscan hacia arriba y luego hacia abajo y en que «como una yurta, la pared se convierte en el techo, que se convierte en suelo, que se convierte de nuevo en pared».



BIG — Bjarke Ingels Group

Las propiedades de las cintas de Möbius ofrecen ventajas de diseño también para los ingenieros. Por ejemplo, un bucle continuo de cinta regrabable, en forma de cinta de Möbius, duplica el tiempo de reproducción. La compañía B. F. Goodrich patentó una cinta transportadora a modo de cinta de Möbius, que duraba el doble que una cinta transportadora convencional, puesto que se desgastaban por igual «ambos» lados de su superficie (ya saben a qué me refiero). Otras patentes Möbius[138] incluyen diseños novedosos de condensadores, retractores abdominales quirúrgicos y filtros autolimpiadores para máquinas de limpieza en seco.

Pero, tal vez, la aplicación más genial de la topología es una que no tiene que ver con cintas de Möbius. Es una variante del tema de giros y enlaces, y puede que le sea útil el próximo domingo que tenga invitados en casa para tomar el *brunch*. Es obra de George Hart, el padre de Vi. Es geómetra y escultor, y antiguo profesor de ciencias de la computación en la Universidad de Stony Brook y jefe de contenidos del MoMath, el Museo de Matemáticas de la ciudad de Nueva York. George ha

ideado una manera de rebanar un bagel (o un donut) por la mitad[139], de tal manera que ambos trozos queden enganchados como eslabones de una cadena.

© *George W. Hart*

La ventaja, además de dejar a sus invitados boquiabiertos, es que crea mayor área de superficie, y por lo tanto, mayor espacio para la crema o la mermelada.

§28. Piense globalmente

Las ideas más familiares de la geometría estaban inspiradas por la antigua idea de que el mundo era plano[140]. Desde el teorema de Pitágoras a las líneas paralelas que jamás se encuentran, estas eran verdades eternas acerca de un mundo imaginario, el paisaje bidimensional de la geometría plana.

La geometría plana, concebida en India, China, Egipto y Babilonia hace más de 2500 años y codificada y refinada por Euclides y los griegos, es la geometría principal —a menudo la única— que se enseña en los institutos. Pero las cosas han cambiado en los últimos milenios.

En una era de globalización, Google Earth y transporte aéreo intercontinental, todos deberíamos tratar de aprender algo de geometría esférica y su generalización moderna[141]. Las ideas básicas no tienen más de 200 años. La geometría diferencial, en la que fueron pioneros Carl Friedrich Gauss y Bernhard Riemann, sustenta estructuras intelectuales tan imponentes como la teoría general de la relatividad de Einstein. Sin embargo, en su centro existen hermosos conceptos, inteligibles para cualquier persona que haya montado en bicicleta, mirado un globo o estirado una goma elástica. Comprender estos conceptos le ayudará a dar sentido a algunas curiosidades en las que puede haber reparado en sus viajes.

Por ejemplo, cuando yo era pequeño, mi padre disfrutaba examinándome de geografía. Me preguntaba: «¿Qué está más al norte, Roma o Nueva York?». La mayoría de la gente diría Nueva York, pero sorprendentemente están casi a la misma latitud; de hecho, Roma está ligeramente más al norte. En el mapamundi más habitual (la engañosa proyección de Mercator, en la que Groenlandia aparece enorme), parece que uno pudiera ir en línea recta de Nueva York a Roma dirigiéndose hacia el este.

Sin embargo, los pilotos nunca toman esa ruta. Siempre salen de Nueva York hacia el noreste, por la costa de Canadá. Yo solía pensar que permanecían cerca de tierra por razones de seguridad, pero esa no es la razón. Teniendo en cuenta la curvatura de la Tierra, esa es sencillamente la ruta más directa[142]. El camino más corto de Nueva York a Roma es ir a través de Nueva Escocia y Terranova, dirigirse hacia el Atlántico y, finalmente, cruzar el sur de Irlanda y volar a través de Francia hasta la soleada Italia.

Este tipo de ruta en el globo se llama arco de un gran círculo. Igual que las líneas rectas en el espacio ordinario, los grandes círculos en una esfera contienen los caminos más cortos entre dos puntos cualesquiera. Se les llama «grandes» porque son los mayores círculos que puede tener una esfera. Ejemplos visibles son el ecuador y los círculos longitudinales que pasan por los polos norte y sur.

Otra propiedad que comparten las líneas y los grandes círculos es que son el camino más recto entre dos puntos. Esto puede sonar raro: *todos* los caminos en un globo son curvos, ¿a qué nos referimos con «recto»? Bueno, algunos caminos son

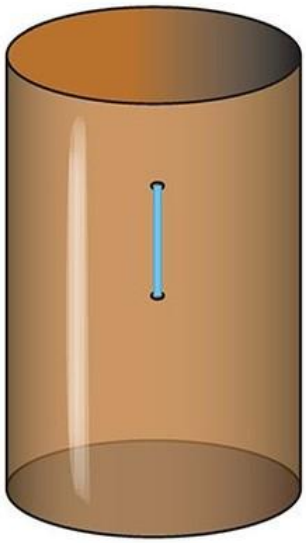
más curvados que otros. Los grandes círculos no realizan ninguna curvatura *adicional* más allá de lo que están obligados a hacer siguiendo la superficie de la esfera.

He aquí una manera de visualizar esto. Imagine que está montando en una pequeña bicicleta sobre la superficie de un globo y pretende permanecer en una ruta determinada. Si es parte de un gran círculo, podrá mantener la rueda delantera apuntando hacia delante en todo momento. Ese es el sentido en que los grandes círculos son rectos. Por el contrario, si trata de tomar una línea de latitud cercana a uno de los polos, tendría que mantener el manillar girado.

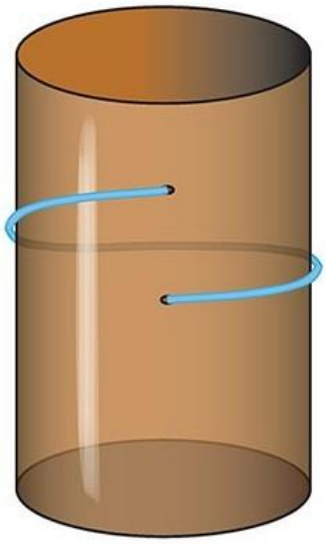
Pero está claro que, en lo que a superficies se refiere, el plano y la esfera son absolutamente simples. La superficie del cuerpo humano o una lata, o un donut, son más curiosas: todas tienen mucha menos simetría, además de varias clases de agujeros y pasadizos que las hacen confusas de recorrer. En este contexto más general, dar con el camino más corto entre dos puntos se hace más complicado. Así que en lugar de profundizar en aspectos técnicos, ciñámonos a un enfoque intuitivo. Aquí es donde las gomas elásticas nos serán útiles.

Concretamente, imagine una goma resbaladiza que se contrae todo lo posible mientras está en la superficie de un objeto. Con su ayuda, fácilmente podemos determinar el camino más corto entre Nueva York y Roma o entre cualesquiera dos puntos en una superficie. Ate los extremos de la goma a los puntos de salida y destino y deje que se tense mientras continúa aferrándose a los contornos de la superficie. Cuando la goma está tan tensa como le permiten las restricciones, *voilà:* encuentra el camino más corto.

En superficies algo más complicadas que los planos o las esferas, puede suceder algo extraño y novedoso: *muchos* «caminos más cortos» a nivel local pueden existir entre los mismos dos puntos. Por ejemplo, tomemos por caso la superficie de una lata de sopa, con un punto situado justo debajo del otro.



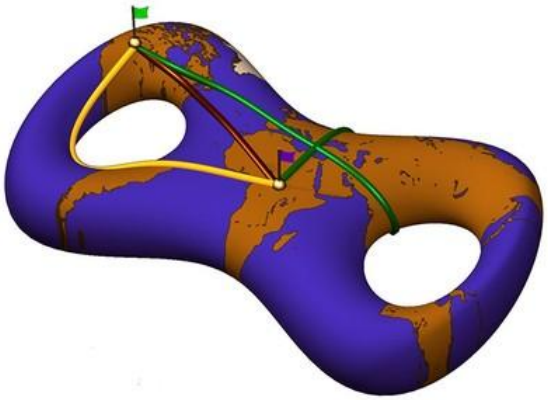
El camino más corto entre ambos es, claramente, un segmento, como se muestra arriba, y nuestra goma daría con esa solución. Por lo tanto, ¿qué hay de nuevo en esto? La forma cilíndrica de la lata abre nuevas posibilidades para todo tipo de contorsiones. Supongamos que exigimos que la goma rodee el cilindro una vez antes de conectarse al segundo punto. (Restricciones de este tipo se imponen al ADN cuando se envuelve alrededor de ciertas proteínas en los cromosomas). Ahora, cuando la goma se tensa, forma una hélice, como las curvas en los postes de las antiguas barberías.



Esta trayectoria helicoidal califica como otra solución al problema del camino más corto, en el sentido de que es el más corto de los caminos candidatos *cercanos*. Si mueve ligeramente la cuerda, necesariamente se alargará y después se contraerá de nuevo. Podríamos decir que es el camino más corto a nivel local, el campeón regional de todos aquellos que se enredan una vez alrededor del cilindro. (Por cierto, es por esto por lo que la materia se llama geometría diferencial: estudia los efectos de pequeñas *diferencias* locales en distintos tipos de formas, como la diferencia entre el camino helicoidal y sus vecinos).

Pero eso no es todo. Hay otro campeón que gira alrededor dos veces, y otro que gira tres veces y así sucesivamente. ¡Hay infinitos caminos más cortos a nivel local en un cilindro! Claro que ninguna de estas hélices es globalmente el camino más corto. El camino en línea recta es más corto que todos ellos.

De igual modo, superficies con agujeros y manillares permiten caminos más cortos a nivel local, distinguidos por su pauta de ir tejiendo alrededor de varias partes de la superficie. La foto siguiente es de un vídeo del matemático Konrad Polthier[143], de la Universidad Libre de Berlín, e ilustra la no unicidad de estos caminos localmente más cortos, o geodésicos, en la superficie de un planeta imaginario con forma de ocho, una figura conocida en el sector como «toroide de 2 agujeros».



Andreas Arnez, Konrad Polthier, Martin Steffens, Christian Teitzel. Imágenes del DVD Touching Soap Films, Springer, 1995.

Las tres geodésicas que se observan visitan partes muy distintas del planeta y, por tanto, ejecutan distintos patrones de bucle. Pero lo que tienen en común es que son más directas que los caminos cercanos. Y al igual que las líneas rectas en un plano o los grandes círculos en una esfera, estas geodésicas son las curvas más directas de

la superficie. Se doblan para adaptarse a la superficie, pero no se doblan dentro de ella. Para aclararlo, Polthier ha elaborado otro vídeo revelador.

Aquí, una moto sin conductor circula por una autopista geodésica en un toroide de 2 agujeros, siguiendo la disposición del terreno. Lo más destacable es que el manillar está fijado hacia delante; no necesita dirigirlo para permanecer en la autopista. Esto pone de relieve la impresión anterior de que las geodésicas, como los grandes círculos, son la generalización natural de las líneas rectas.

Andreas Arnez, Konrad Polthier, Martin Steffens, Christian Teitzel. Imágenes del DVD Touching Soap Films, Springer, 1995.

Con todos estos vuelos de fantasía, puede que se pregunte si las geodésicas tienen algo que ver con la realidad; claro que sí. Einstein demostró que los haces de luz siguen geodésicas cuando navegan por el universo. La famosa curvatura de la luz estelar que rodea el Sol, detectada en las observaciones del eclipse de 1919, confirmó que la luz viaja en geodésicas a través del espacio-tiempo curvo, con la curvatura causada por la fuerza de gravedad del Sol.

A un nivel más terrenal, la matemática de hallar rutas más cortas es fundamental para encaminar el tráfico en Internet. En este caso, sin embargo, el espacio relevante es un laberinto colosal de direcciones y enlaces, a diferencia de las superficies lisas consideradas anteriormente, y los asuntos matemáticos tienen que ver con la velocidad de los algoritmos: ¿cuál es la manera más eficiente de encontrar la ruta más corta en una red?[144]. Dado el gran número de rutas

potenciales, el problema sería abrumador si no fuera por el ingenio de los matemáticos y científicos informáticos que lo abordaron.

A veces, cuando la gente dice que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta, se dice en sentido figurado, ridiculizando los matices y afirmando el sentido común. En otras palabras: no te compliques, hazlo sencillo. Pero luchar contra los obstáculos puede dar lugar a una gran belleza, tanto es así, que en arte y matemáticas a menudo es más fructífero imponer restricciones sobre nosotros mismos. Piense en un haiku, o en un soneto, o en contar la historia de su vida en seis palabras[145]. Lo mismo puede decirse de toda la matemática creada para ayudarle a encontrar el camino más corto de aquí hasta allí cuando no puede tomar el camino más fácil.

Dos puntos. Muchos caminos. Felicidad matemática.

§29. Análisis. Historia de una terapia peligrosa

Las matemáticas se pavonean con un intimidante aire de seguridad. Son tan decisivas, inflexibles y firmes como un capo de la mafia. Te darán un argumento que no podrás rechazar.

Pero, en privado, las matemáticas tienen inseguridades ocasionales. Tienen dudas. Se cuestionan a sí mismas y no están seguras de tener siempre razón, especialmente en lo que al infinito se refiere. El infinito puede quitar el sueño a las matemáticas, hacerles sentir preocupación, inquietud, temor existencial. Debido a que ha habido momentos en la historia de las matemáticas en los que desatar al infinito ha traído el caos, se temió que pudiera estallar la empresa entera. Y eso sería malo para el negocio.

En la serie de HBO *Los Soprano*, el jefe mafioso Tony Soprano consulta a una psiquiatra en busca de tratamiento para sus ataques de ansiedad, tratando de entender por qué su madre lo quiere muerto, esas cosas que pasan… Bajo una fachada de seguridad y dureza, se encuentra una persona confusa y asustada.

De la misma manera, el cálculo se echó en el diván justo cuando parecía estar en su momento más letal. Tras décadas de triunfos, de segar todos los problemas que se interponían en su camino, empezó a tomar conciencia de que había algo podrido en su interior. Las mismas cosas que lo habían hecho triunfar —su habilidad y valentía brutales en la manipulación de los procesos infinitos— amenazaban ahora con destruirle. Y la terapia que lo ayudó a superar esta crisis llegó a ser conocida, casualmente, como «análisis»[146].

AF archive / Alamy

He aquí un ejemplo del tipo de problema que preocupaba a los matemáticos del siglo XVIII. Considere la serie infinita:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Es el equivalente numérico de vacilar eternamente[147], dar un paso hacia delante, uno hacia atrás, uno hacia delante, otro hacia atrás y así sucesivamente ad infinítum.

¿Tiene sentido esta serie? Y si lo tiene, ¿a qué equivale?

Desorientado por una expresión infinitamente larga como esta, un optimista podría esperar que algunas de las viejas reglas —las reglas forjadas a partir de la experiencia con sumas *finitas*— fueran todavía aplicables. Por ejemplo, sabemos que $1 + 2 = 2 + 1$; cuando sumamos dos o más números en una suma finita, siempre podemos cambiarles el orden sin cambiar el resultado: $a + b$ es igual a $b + a$ (la propiedad conmutativa de la suma). Y cuando hay más de dos números, siempre podemos insertar paréntesis con desenfreno, agrupando los números como nos apetezca, sin afectar a la respuesta final. Por ejemplo, $(1 + 2) + 4 = 1 + (2 + 4)$; sumar 1 y 2 primero y luego 4, da el mismo resultado que sumar 2 y 4 primero y después 1. Esto se llama propiedad asociativa de la suma. Funciona incluso si algunos números son restados, siempre que recordemos que restar un número es igual que sumar su negativo. Por ejemplo, considere una versión de tres números de

la serie anterior, y pregúntese: ¿qué es 1 − 1 + 1? Podríamos verlo como (1 − 1) + 1, o como 1 + (−1 + 1), donde en ese segundo conjunto de paréntesis hemos sumado un 1 negativo en lugar de restar 1. En cualquier caso, la respuesta es 1.

Pero, cuando intentamos extender estas reglas a sumas *infinitas*, nos esperan unas cuantas sorpresas. Fíjese en la contradicción que se produce si se saca a relucir la ley asociativa y se aplica confiadamente a 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 +… Por un lado, parece que podemos aniquilar los unos positivos y negativos emparejándolos así:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

$$= 0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$= 0$$

Por otra parte, se podría igualmente insertar el paréntesis así y concluir que la suma es 1:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$$

$$= 1 + 0 + 0 + \ldots$$

$$= 1$$

Ninguno de estos argumentos parece más convincente que el otro, así que la suma quizá sea 0 y 1 *al mismo tiempo*. Esta tesis suena absurda para nosotros hoy, pero, en su momento, algunos matemáticos se consolaron con ella por sus tintes religiosos. Les recordó a la afirmación teológica de que Dios creó el mundo de la nada. Como escribió el matemático y sacerdote Guido Grandi en 1703: «Al poner paréntesis en la expresión 1 − 1 + 1 − 1 +… de diferentes maneras, puedo, si quiero, obtener 0 o 1. Pero entonces, la idea de la creación *ex nihilo* es perfectamente plausible».

Sin embargo, parece que Grandi favoreció un tercer valor para la suma, distinto de 0 y de 1. ¿Puede adivinar qué número pensaba que debería ser? Piense en lo que diría si estuviera bromeando, pero tratando de sonar académico.

Correcto: Grandi creyó que la verdadera suma era $\frac{1}{2}$. Y matemáticos muy superiores, entre ellos Leibniz y Euler, estuvieron de acuerdo. Existían varías líneas de razonamiento que sustentaban este razonamiento. La más sencilla era reparar en que $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ puede expresarse en sus propios términos, de la siguiente manera. Usemos la letra S para denotar la suma. Entonces, por definición

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Ahora deje al primer 1 solo a la derecha y observe el resto de los números. Albergan su propia copia de S, situada a la derecha de ese primer 1 y restándose de él:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$= 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots)$$

$$= 1 - S$$

Entonces, $S = 1 - S$ y, por lo tanto, $S = 1/2$.

El debate en torno a la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ duró unos 150 años, hasta que una nueva generación de analistas colocó el cálculo y sus procesos infinitos (límites, derivadas, integrales, series infinitas) sobre una base firme, de una vez por todas. La materia se reconstruyó de abajo arriba, con la configuración de una estructura lógica tan sólida como la geometría de Euclides.

Dos de sus nociones clave son las sumas parciales y la convergencia. En una suma parcial uno simplemente suma una cantidad finita de términos y después para. Por ejemplo, si sumamos los primeros tres términos de la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, obtenemos $1 - 1 + 1 = 1$. Llamemos a esto S_3. Aquí la letra S quiere decir «suma» y el subíndice 3 indica que nosotros solo hemos añadido los primeros tres términos.

De igual modo, las primeras sumas parciales de esta serie son

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - 1 = 0$$

$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

Así vemos que las sumas parciales van y vienen entre 0 y 1, sin tendencia a establecerse en 0, en 1, o en 1/2, o en cualquier otra cosa. Por esta razón, los matemáticos de nuestro tiempo dirían que la serie 1 − 1 + 1 − 1 +… no converge. En otras palabras, sus sumas parciales no se aproximan a ningún valor limitante a medida que se añaden más y más términos a la suma. Por lo tanto la suma de la serie infinita carece de sentido.

Así que supongamos que nos ceñimos al buen camino —nada de coquetear con el lado oscuro— y centramos nuestra atención exclusivamente en aquellas series que convergen. ¿Nos deshacemos así de las paradojas anteriores?

Aún no. Las pesadillas siguen. Y no está mal que así sea, porque, enfrentándose a estos nuevos demonios, los analistas del XIX descubrieron secretos más profundos en el corazón del cálculo y los trajeron a la luz. Las lecciones aprendidas se han demostrado incalculables, no solo en el mundo matemático, sino también en la aplicación de las matemáticas en diversos campos, desde la música a las imágenes médicas.

Considere esta serie, conocida en el sector como la serie armónica alternada:

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \ldots$$

En lugar de un paso adelante, un paso atrás, los pasos ahora se van haciendo progresivamente más pequeños. Es un paso adelante, pero solo *medio* paso atrás, y luego una *tercera* parte del paso, y la *cuarta* parte atrás, y así sucesivamente. Observe el patrón: las fracciones con denominadores impares tienen delante un signo positivo, mientras que las fracciones pares tienen signos negativos. Las sumas parciales en este caso son:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - 1/2 = 0{,}500$$

$$S_3 = 1 - 1/2 + 1/3 = 0{,}833\ldots$$

$$S_4 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 = 0{,}583\ldots$$

Y si llega lo suficientemente lejos, verá que se unen en número cercano a 0,69. De hecho, se puede demostrar que la serie converge. Su valor limitante es el logaritmo natural de 2, denotado ln(2) y aproximadamente igual a 0,693147.

Entonces, ¿dónde está la pesadilla? Aparentemente, en ninguna parte. La serie armónica alternada parece una serie convergente bonita, educada, el tipo de serie que sus padres aprobarían.

Y que la hace tan peligrosa. Es un camaleón, una estafadora, una psicópata resbaladiza que será lo que usted quiera que sea. Si suma sus números en distinto orden, puede hacer que sume cualquier cosa. Literalmente. Puede reordenarse para converger en cualquier número real: 297,126, o -42π, o 0, o lo que su corazón desee.

Es como si la serie tuviera un desprecio absoluto por la propiedad conmutativa de la suma. Simplemente añadiendo los términos en un orden diferente, puede cambiar la respuesta, algo que *nunca* podría pasar en una suma finita. Así que, a pesar de que la serie original converge, sigue siendo capaz de rarezas inimaginables en la aritmética ordinaria.

En lugar de probar este hecho asombroso (un resultado conocido como el teorema de reordenamiento de Riemann)[148], veamos un reordenamiento particularmente simple, cuya suma es fácil de calcular. Supongamos que sumamos *dos* de los términos negativos en la serie armónica alternada por cada *uno* de sus términos positivos, de esta manera:

$$1 - 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/6 - 1/8 + 1/5 - 1/10 - 1/12 + \ldots$$

A continuación, simplifique cada una de las expresiones entre corchetes restando el segundo término al primero, sin tocar el tercer término. La serie se reduce entonces a

$$1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + 1/10 - 1/12 + \ldots$$

Tras sacar 1/2 de todas las fracciones anteriores, se convierte en:

$$1/2\ 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \ldots$$

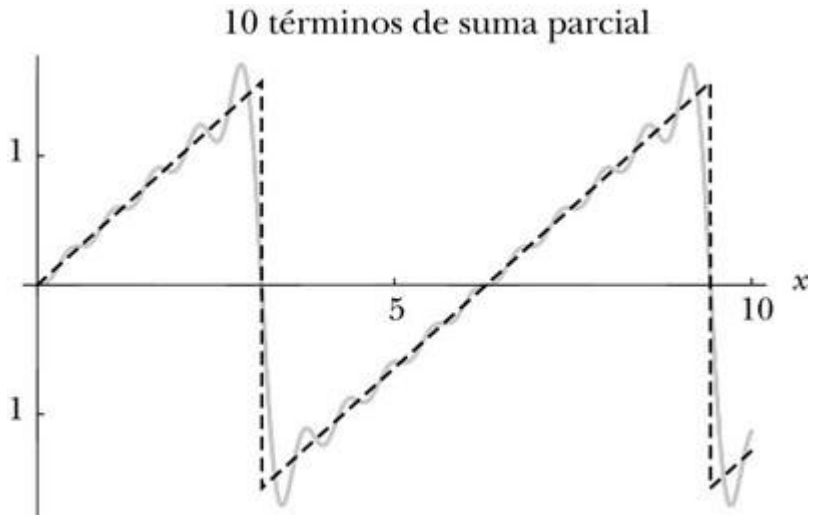
Mire quién ha vuelto: la bestia de dentro de los corchetes es la mismísima serie armónica alternada. Reordenándola, la hemos hecho la *mitad* de grande de lo que era, ¡aunque contiene los mismos términos! Reordenada en ese orden, la serie ahora converge en 1/2ln(2) = 0,346…

Extraño, sí. Angustioso, también[149]. Y sorprendentemente, importa también en la vida real. Como hemos visto a lo largo de este libro, incluso los conceptos matemáticos más abstrusos y rebuscados a menudo encuentran aplicación en cosas prácticas. El enlace en el presente caso es que en muchas partes de la ciencia y la tecnología —desde el procesamiento y acústica de señales a las finanzas y la medicina— resulta útil para representar diferentes tipos de curvas, sonidos, señales o imágenes como sumas de curvas, sonidos, señales o imágenes más simples. Cuando los componentes básicos son ondas sinusoidales, la técnica se conoce como análisis de Fourier[150], y las cantidades correspondientes se llaman series de Fourier. Pero cuando la serie en cuestión tiene algunas de las mismas patologías que la serie armónica alternada y sus parientes igualmente desquiciados, el comportamiento de convergencia de las series de Fourier puede ser muy extraño.

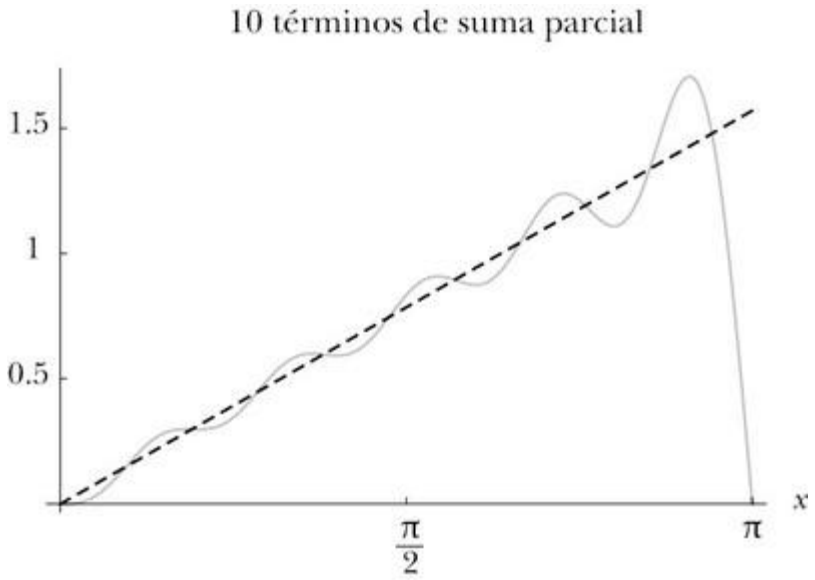
Aquí, por ejemplo, está una serie de Fourier directamente inspirada en la serie armónica alternada:

$$f(x) = \text{sen}\, x - 1/2\ \text{sen}\, 2x + 1/3\ \text{sen}\, 3x - 1/4\ \text{sen}\, 4x + \ldots$$

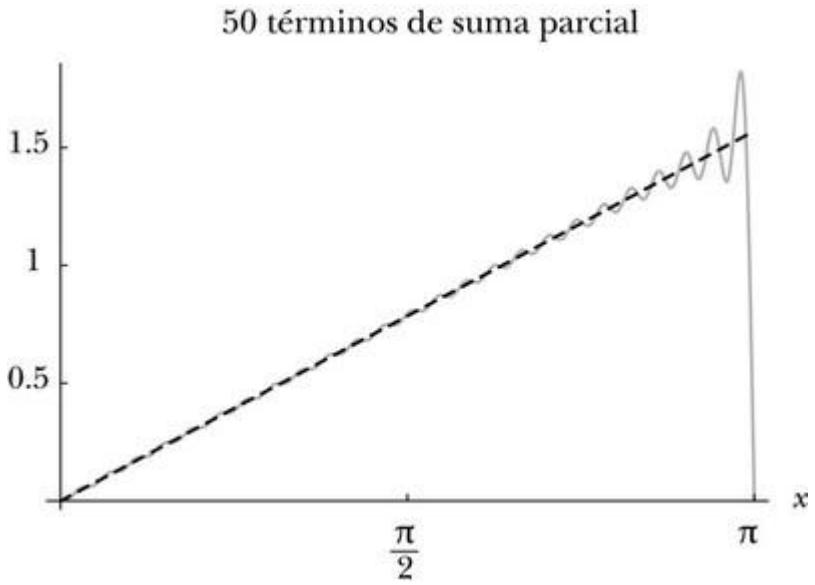
Para entender qué aspecto tiene esto, vamos a representar gráficamente la suma de sus diez primeros términos.

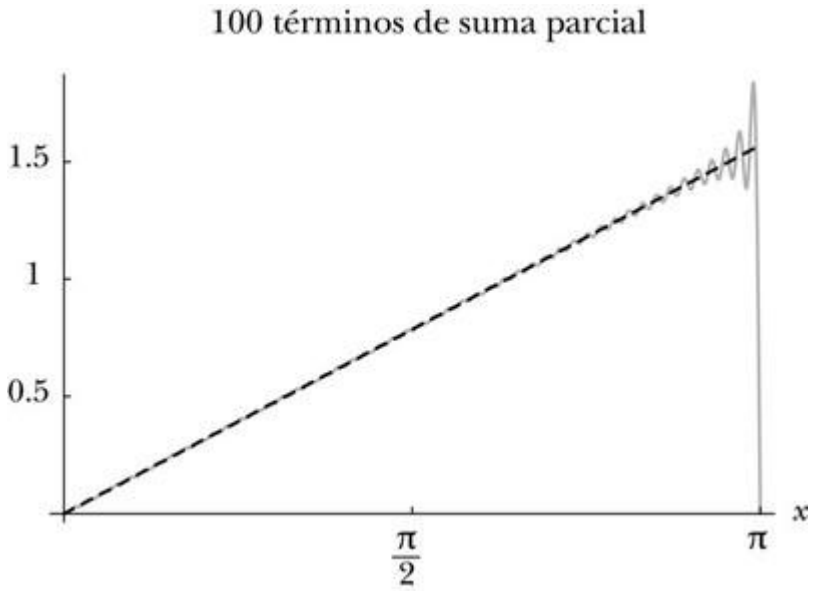


Esta suma parcial (que se muestra como una línea continua) está claramente tratando de aproximarse a una curva mucho más sencilla, una onda con forma de dientes de sierra (mostrada por la línea de puntos). Nótese, sin embargo, que algo falla en los bordes de los dientes. Las ondas sinusoidales dan allí un sobreimpulso a la marca y producen una extraña franja que no está en la propia onda de dientes de sierra. Para ver esto con más claridad, he aquí un *zoom* cerca de uno de los bordes, en $x = \pi$.



Supongamos que intentamos deshacernos de la franja incluyendo más términos en la suma. No hay suerte. La franja simplemente se hace más fina y se acerca más al borde, pero su altura permanece casi igual.





La culpa podemos dejarla en la puerta de la serie armónica alternada. Sus patologías anteriormente comentadas contaminan la serie asociada Fourier. Son las responsables de esa molesta franja de la que no hay manera de librarse.

Este efecto, comúnmente llamado el fenómeno de Gibbs[151], es más que una curiosidad matemática. Conocido desde el siglo XIX, aparece ahora en nuestras

fotografías digitales y en los escáneres de resonancia magnética[152]. Las oscilaciones no deseadas causadas por el fenómeno de Gibbs pueden producir borrosidad, brillo y otros efectos en los bordes afilados de la imagen. En un contexto médico, estos se pueden confundir con tejido dañado, o pueden ocultar lesiones realmente presentes. Afortunadamente, los analistas de hace un siglo identificaron las causas de los artefactos de Gibbs[153]. Sus ideas nos han enseñado la manera de superarlos o, al menos, cómo detectarlos cuando se producen.

La terapia ha sido muy exitosa. Ahora nos pasarán la factura.

§30. El hotel infinito de Hilbert

En febrero de 2010 recibí un e-mail de una mujer llamada Kim Forbes. Su hijo de seis años, Ben, le había hecho una pregunta de matemáticas que no podía contestar, y esperaba que yo pudiera ayudarla.

> *Gracias. Ben quedó satisfecho con esa respuesta y le gusta la idea de que el infinito es lo suficientemente grande como para ser a la vez par e impar.*
>
> *Aunque algo se ha distorsionado en la traducción (el infinito no es ni par ni impar, ni ambos), Ben está insinuando una verdad mayor. El infinito puede ser alucinante.*
>
> *Algunas de sus vertientes más extrañas salieron a la luz a finales del siglo XIX, con el trabajo pionero de Georg Cantor*[154] sobre la teoría de conjuntos[155].

Cantor estaba particularmente interesado en los conjuntos infinitos de números y puntos, como el conjunto {1, 2, 3, 4,…} de números naturales y el conjunto de puntos de una línea. Definió una manera rigurosa de comparar diferentes conjuntos infinitos y descubrió que, sorprendentemente, algunos infinitos son mayores que otros.

En su momento, la teoría de Cantor no solo provocó resistencia, sino escándalo. Henri Poincaré, uno de los matemáticos principales de la época, lo calificó de «enfermedad». Sin embargo, otro gigante de la época, David Hilbert[156], lo vio como una contribución duradera y más tarde proclamó: «Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado».

Mi objetivo aquí es ofrecerle una idea de este paraíso. Pero en lugar de trabajar directamente con grupos de números o puntos, permítame seguir un enfoque introducido por el propio Hilbert. Transmitió vívidamente la extrañeza y maravilla

de la teoría de Cantor a través de una parábola acerca de un gran hotel, hoy conocida como el hotel infinito de Hilbert[157].

Está siempre lleno, pero siempre hay una habitación libre.

Pues el hotel Hilbert no tiene, simplemente, cientos de habitaciones, tiene *infinitas*. Cada vez que llega un nuevo huésped, el gerente mueve al ocupante de la habitación 1 a la habitación 2, al de la habitación 2 a la 3, etcétera. Esto libera la habitación 1 para el recién llegado y aloja también a todos los demás (aunque los moleste con tanto movimiento).

Supongamos ahora que llegan *infinitos* nuevos huéspedes, sudorosos y con mal genio. No hay problema. El gerente imperturbable mueve al ocupante de la habitación 1 a la 2, al de la 2 a la 4, al de la 3 a la 6, y así sucesivamente. Este truco de duplicación libera todas las habitaciones impares —un número infinito de ellas— para los nuevos huéspedes.

Esa misma noche, un convoy sin fin de autobuses ruge hasta la recepción. Hay autobuses infinitos y, lo que es peor, cada uno está cargado con una infinidad de personas malhumoradas exigiendo que el hotel esté a la altura de su lema: «Siempre hay sitio en el hotel Hilbert».

No es la primera vez que el gerente se enfrenta a este reto, así que se lo toma con calma.

Primero hace el truco de duplicación, que reasigna a los clientes actuales a las habitaciones pares y libera todas las impares. Un buen comienzo, porque ahora tiene un número infinito de habitaciones disponibles.

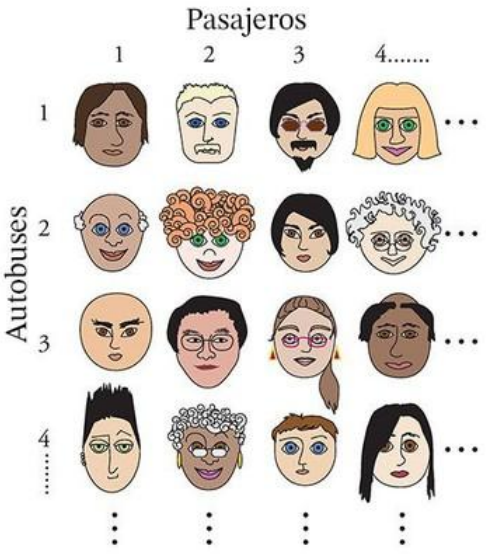
Pero ¿basta con esto? ¿De verdad hay suficientes habitaciones impares para alojar a esta horda rebosante de nuevos huéspedes? Parece poco probable, ya que hay algo así como infinitas personas al cuadrado que claman por estas habitaciones. (¿Por qué infinito al cuadrado? Porque había un número infinito de personas en cada uno de los infinitos autobuses, y eso equivale a infinito por infinito, signifique eso lo que signifique).

Aquí es donde la lógica del infinito se vuelve muy extraña.

Para entender cómo va a resolver el gerente su problema más reciente, ayuda visualizar a toda la gente a la que tiene que servir.

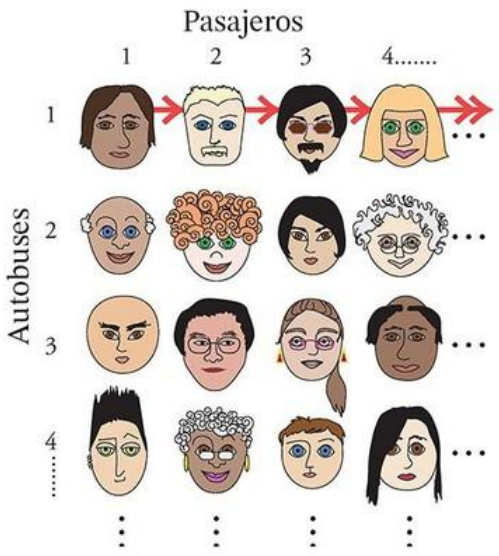
Por supuesto, no podemos mostrar, literalmente, a todos aquí, ya que el esquema tendría que ser infinito en ambas direcciones, pero una versión limitada de la imagen es suficiente. Lo importante es que cualquier pasajero concreto de un autobús (su tía Inés, por ejemplo, que ha venido de vacaciones desde Louisville)

aparece seguro en alguna parte del diagrama, siempre y cuando se incluyan suficientes filas y columnas. En ese sentido, todas las personas de cada autobús se contabilizan. Puede nombrar al pasajero y es seguro que estará representado a un número finito de pasos al este y al sur de la esquina del diagrama.

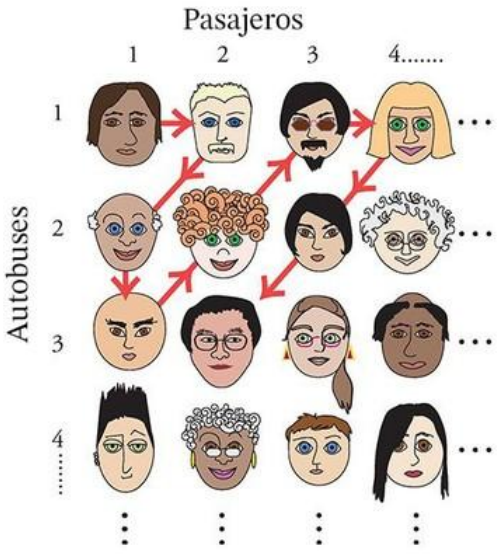


El desafío del gerente es encontrar un modo de trabajar con esta imagen de manera sistemática. Tiene que idear un plan para la asignación de las habitaciones, de tal manera que todo el mundo acabe teniendo una, después de que solo un número *finito* de personas hayan sido atendidas.

Por desgracia, el gerente anterior no había entendido esto y sobrevino el caos. Cuando convoyes similares se presentaron en su turno, se puso tan nervioso al tratar de atender a toda la gente del primer autobús, que nunca llegó a ningún otro, dejando a todos esos pasajeros abandonados, gritando y enfurecidos. En el diagrama siguiente se ilustra esta estrategia miope, que correspondería a un camino que va eternamente hacia el este, a lo largo de la fila 1.



El nuevo gerente, sin embargo, tiene todo bajo control. En lugar de atender a un solo autobús, zigzaguea por el diagrama, yendo en abanico desde la esquina, como se muestra a continuación:



Comienza con el pasajero 1 del autobús 1, al que da la primera habitación vacía. La segunda y tercera habitaciones van para el pasajero 2 del autobús 1 y para el pasajero 1 del autobús 2, que están ambos representados en la segunda diagonal desde la esquina del diagrama. Tras atenderlos, el gerente continúa con la tercera diagonal y entrega un juego de llaves al pasajero 1 del autobús 3, al pasajero 2 del autobús 2 y al pasajero 3 del autobús 1.

Espero que el procedimiento del gerente —progresando desde una diagonal a otra— se vea con claridad en la foto anterior, y que esté convencido de que se puede llegar a cualquier persona en particular en un número finito de pasos.

Así que, tal y como se anunciaba, siempre hay hueco en el hotel Hilbert.

El argumento que acabamos de presentar es famoso en la teoría de conjuntos infinitos. Cantor lo empleó para demostrar que existen exactamente tantas fracciones positivas (coeficientes p/q de números enteros positivos p y q) como números naturales (1, 2, 3, 4,…). Esa es una afirmación mucho más fuerte que decir que ambos conjuntos son infinitos. Dice que son infinitos precisamente en la misma medida, en el sentido de que puede establecerse una correspondencia de uno-a-uno entre ellos.

Se podría pensar en esta correspondencia como un sistema de compañerismo en el que se empareja cada número natural con una fracción positiva y viceversa. La existencia de un un sistema de compañerismo parece contradecir totalmente el sentido común; es el tipo de sofisma que hizo retroceder a Poincaré, porque implica que podríamos hacer una lista exhaustiva de todas las fracciones positivas, a pesar de que ¡no existe la más pequeña!

Y sin embargo existe esa lista. Ya la hemos encontrado. La fracción p/q corresponde al pasajero p en el autobús q, y el argumento anterior demuestra que cada una de estas fracciones puede emparejarse con un cierto número natural 1, 2, 3…, dado por el número de habitación del pasajero en el hotel Hilbert.

El golpe de gracia es la demostración de Cantor de que algunos conjuntos infinitos son mayores que este. Específicamente, el conjunto de números reales entre 0 y 1 es incontable —no se puede poner en correspondencia con los números naturales—. Para el sector de la hostelería, esto quiere decir que si todos estos números reales se presentan en el mostrador de recepción y tocan la campanita, no habrá habitaciones suficientes para todos, ni siquiera en el hotel Hilbert.

La demostración es por reducción al absurdo. Supongamos que a cada número real se le pudiera ofrecer una habitación propia. A continuación, la lista de los ocupantes, identificados por sus expansiones decimales y listados por número de habitación, sería algo así:

Habitación 1: 0,6708112345…
Habitación 2: 0,1918676053…
Habitación 3: 0,4372854675…

Habitación 4: 0,2845635480…

Recuerde, se supone que esto es una lista completa. Todo número real entre 0 y 1 debe aparecer en alguna parte de la lista, en algún lugar finito.
Cantor demostró que una gran cantidad de números no se encuentran en ninguna de tales listas, esa es la contradicción. Por ejemplo, para construir uno que no aparece en ninguna parte de la lista anterior, baje por la diagonal y construya un nuevo número desde los dígitos subrayados:

Habitación 1: 0,<u>6</u>708112345…
Habitación 2: 0,1<u>9</u>18676053…
Habitación 3: 0,43<u>7</u>2854675…
Habitación 4: 0,284<u>5</u>635480…

El decimal generado es 0,6975…
Pero aún no hemos terminado. El siguiente paso es tomar el decimal y cambiar sus dígitos, reemplazando cada uno de ellos por cualquier otro dígito entre 1 y 8[158]. Por ejemplo, podríamos cambiar el 6 por el 3, el 9 por el 2, el 7 por el 5, etcétera.
El nuevo decimal 0,325… es el asesino. Claramente no está en la habitación 1, puesto que tiene un primer dígito distinto al número que está allí. Tampoco está en la habitación 2, ya que su segunda cifra no encaja. En general, es distinto al número *n* en el puesto decimal *n*. Así que no aparece en ninguna parte de la lista.
La conclusión es que el hotel Hilbert no puede alojar a todos los números reales. Sencillamente, hay demasiados, un infinito más allá del infinito[159].
Y con esta humillante idea, llegamos al final de este libro, que comenzó también con una escena en un hotel imaginario. Un personaje de Barrio Sésamo llamado Humphrey, haciendo el turno de comidas del hotel de los Brazos Peludos, tomó un pedido de una habitación llena de pingüinos hambrientos —«Pez, Pez, Pez, Pez, Pez, Pez»— y enseguida aprendió el poder de los números.
Ha sido un largo viaje desde los peces hasta el infinito. Gracias por acompañarme.

Agradecimientos

Muchos compañeros y amigos me ayudaron a mejorar este libro, ofreciéndome sus sabios consejos: matemáticos, estilísticos, históricos y demás. Gracias a Doug Arnold, Sheldon Axler, Larry Braden, Dan Callahan, Bob Connelly, Tom Gilovich, George Hart, Vi Hart, Diane Hopkins, Herbert Hui, Cindy Klauss, Michael Lewis, Michael Mauboussin, Barry Mazur, Eri Noguchi, Charlie Peskin, Steve Pinker, Ravi Ramakrishna, David Rand, Richard Rand, Peter Renz, Douglas Rogers, John Smillie, Grant Wiggins, Stephen Yeung y Carl Zimmer.

Otros colegas crearon imágenes para este libro o me dieron permiso para incluir su trabajo visual. Gracias a Rick Allmendinger, Paul Bourke, Mike Field, Brian Madsen, Nik Dayman (Teamfresh), Mark Newman, Konrad Polthier, Christian Rudder de OkCupid, Simon Tatham y Jane Wang.

Estoy inmensamente agradecido a David Shipley por invitarme a escribir la serie de *The New York Times* que condujo a este libro, especialmente por su visión de cómo debía estructurarse la serie. Sencillez, sencillez, sencillez, pedía Thoreau, y tanto él como Shipley tenían razón. George Kalogerakis, mi editor en el *Times*, manejaba su pluma con ligereza, moviendo comas, pero solo si era necesario, mientras me protegía de desaciertos más graves. Su confianza fue enormemente tranquilizadora. Katie O'Brien, del equipo de producción, se aseguró de que lo matemático tuviera buen aspecto y aguantó los cargantes requisitos tipográficos con gracia y buen humor.

Me siento muy afortunado de haber contado, como agente literaria, con Katinka Matson. Ella abogó por este libro desde el principio, con un entusiasmo inspirador.

Paul Ginsparg, Jon Kleinberg, Tim Novikoff y Andy Ruina leyeron borradores de casi todos los capítulos; su única compensación fue el placer de detectar estropicios y usaron sus brillantes mentes para el bien en lugar del mal. Suele ser muy pesado estar rodeado de sabelotodos, pero la realidad es que *sí* lo saben todo, y este libro se ha beneficiado de ello. Estoy muy agradecido por su esfuerzo y estímulo.

Gracias a la ilustradora, Margy Nelson, por su alegría y sensibilidad científica. La sentía como un socio en este proyecto, con esa habilidad suya para encontrar maneras originales de transmitir la esencia de un concepto matemático.

Cualquier escritor estaría bendecido si tuviera como editora a Amanda Cook. ¿Cómo se puede ser, al mismo tiempo, tan amable y sabio y decisivo? Gracias, Amanda, por creer en este libro y por ayudarme a forjar cada pedazo de él. Eamon Dolan, otro de los mejores editores del mundo, guio este proyecto (y a mí mismo)

hacia la línea de meta con gran seguridad y un entusiasmo contagioso. Fue divertido trabajar con los asistentes editoriales, Ashley Gilliam y Ben Hyman, que cuidaron del libro en cada fase de su desarrollo. Gracias a la correctora Tracy Roe, aprendí de las aposiciones, de los apóstrofes y de las palabras como palabras. Pero lo más importante (¡no «importantemente»!) es que afiló la escritura y los conceptos de estas páginas. Gracias también a la publicista Michelle Bonanno, a la directora de marketing Ayesha Mirza, la editora de producción Rebecca Springer, el jefe de producción David Futato y el equipo entero de Houghton Mifflin Harcourt.

Por último, quisiera añadir mi agradecimiento más sentido a mi familia. Leah y Jo, lleváis mucho tiempo oyendo hablar de este libro y, lo creáis o no, ha llegado a su fin. Naturalmente, vuestra próxima tarea es aprenderos todas las lecciones matemáticas que contiene. Y en lo que respecta a mi fantástica y paciente esposa, Carole, que sudó tinta con los primeros *n* borradores y aprendió así el verdadero significado de la expresión «*n* tiende al infinito», permíteme decir, simplemente, te quiero. Encontrarte ha sido el mejor problema que he resuelto.

---

[1] El vídeo *Barrio Sésamo: 1, 2, 3 cuenta conmigo* (1997) puede comprarse online tanto en formato VHS como DVD.

[2] Para una presentación apasionante de la idea de que los números tienen vida propia y de que las matemáticas pueden ser percibidas como una forma de arte, véase P. Lockhart, *A Mathematician's Lament*, Nueva York, Bellevue Literary Press, 2009.

[3] El artículo que introdujo esta frase, ahora famosa, es E. Wigner, «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences», *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, n.º 1 (febrero de 1960), pp. 1-14. Está disponible una versión online en http://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html.
Para mayor profundización en estas ideas y en la cuestión de si las matemáticas fueron inventadas o descubiertas, véase M. Livio, *Is God a Mathematician?*, Nueva York, Simon and Schuster, 2009, y R. W. Hamming, «The unreasonable effectiveness of mathematics», *American Mathematical Monthly*, vol. 87, n.º 2 (febrero de 1980), disponible online en http://www.lmmb.ncifcrf.gov/~toms/Hamming.unreasonable.html.

[4] Como espero dejar claro, este capítulo debe mucho a dos libros, uno un ensayo, el otro una novela, los dos brillantes: P. Lockhart, *A Mathematician's Lament*, Nueva York, Bellevue Literary Press, 2009, que inspiró la metáfora de las piedras y otros ejemplos empleados, y Y. Ogawa, *The Housekeeper and the Professor*, Nueva York, Picador, 2009 [trad. cast.: *La fórmula preferida del profesor*, Madrid, Funambulista, 2008].

[5] Para los lectores jóvenes que disfrutan explorando los números y sus patrones, véase H. M. Enzensberger, *The Number Devil*, Nueva York, Holt Paperbacks, 200 [trad. cast.: *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 2008].

[6] Ejemplos estupendos, pero más avanzados, de visualización en matemáticas se presentan en R. B. Nelsen, *Proofs without Words*, Washington, D. C., Mathematical Association of America, 1997.

[7] Para más agudezas de Sidney Morgenbesser y chistes académicos, véase el muestreo en Language Log (5 de agosto de 2004), «If P, so why not Q?» online en http://itre.cis.upenn.edu/%7Emyl/languagelog/archives/001314.html.

[8] La teoría del equilibrio fue propuesta por primera vez por el psicólogo social Fritz Heider y desde entonces ha sido desarrollada y aplicada por teóricos de las redes sociales, politólogos, antropólogos, matemáticos y físicos. Para la formulación original, véase F. Heider, «Attitudes and cognitive organization», *Journal of Psychology*, vol. 21 (1946), pp. 107-112, y F. Heider, *The Psychology of Interpersonal Relations*, Hoboken, Nueva Jersey, John Wiley and Sons, 1958. Para una revisión de la teoría del equilibrio desde la perspectiva de las redes sociales, véase S. Wasserman y K. Faust, *Social Network Analysis*, Nueva York, Cambridge University Press, 1994, cap. 6.

[9] El teorema de que un estado de equilibrio en una red totalmente conectada debe ser, o bien un nirvana único de todos los amigos, o dos facciones antagónicas, se demostró por primera vez en D. Cartwright y F. Harary, «Structural balance: A generalization of Heider's theory», *Psychological Review*, vol. 63 (1956), pp. 277-293. Una versión muy legible de esta prueba y una pequeña introducción a las matemáticas de la teoría del equilibrio ha sido ofrecida por dos de mis colegas de Cornell: D. Easley y J. Kleinberg, *Networks, Crowds, and Markets*, Cambridge, Cambridge University Press, 2010.
En gran parte de los primeros trabajos sobre la teoría del equilibrio, un triángulo de tres enemigos mutuos (por lo tanto, tres lados negativos) se consideraba desequilibrado. Asumí esto implícitamente al citar los resultados sobre los estados de nirvana y de dos bloques como las únicas configuraciones de una red totalmente conectada en la que todos los triángulos están equilibrados. Sin embargo, algunos investigadores han cuestionado esta idea y han explorado las implicaciones de tratar a un triángulo de tres negativos como equilibrado. Para más información sobre esta y otras generalizaciones de la teoría del equilibrio, véanse los libros de Wasserman y Faust y de Easley y Kleinberg antes citados.
[10] El ejemplo y la representación gráfica de los cambios de alianzas antes de la Primera Guerra Mundial son de T. Antal, P. L. Krapivsky y S. Redner, «Social balance on networks: The dynamics of friendship and enmity», *Physica D*, vol. 224 (2006), pp. 130-136, disponible online en http://arxiv.org/abs/physics/0605183. Este ensayo, escrito por tres físicos estadísticos, destaca por la refundición de la teoría del equilibrio en un marco dinámico, por lo que se extiende más allá de sus estáticos enfoques anteriores. Para conocer los detalles históricos de las alianzas europeas, véase W. L. Langer, *European Alliances and Alignments, 1871-1890*, 2.ª ed., Nueva York, Knopf, 1956, y B. E. Schmitt, *Triple Alliance and Triple Entente*, Nueva York, Henry Holt and Company, 1934.
[11] Keith Devlin ha escrito una serie de ensayos provocativos sobre la naturaleza de la multiplicación: qué es, qué no es y por qué ciertas maneras de pensar en ella son más válidas y fiables que otras. Argumenta a favor de pensar la multiplicación en términos de escalas, no de sumas repetidas, y muestra que los dos conceptos son muy diferentes en escenarios reales, donde están involucradas unidades. Véase su publicación en el blog de enero de 2011: «What exactly is multiplication?», en http://www.maa.org/devlin/devlin_01_11.html, así como sus publicaciones de 2008: «It ain't no repeated addition» (http://www.maa.org/devlin/devlin_06_08.html); «It's still not repeated addition» (http://www.maa.org/devlin/devlin_0708_08.html); y «Multiplication and those pesky British spellings» (http://www.maa.org/devlin/devlin_09_08.html). Estos artículos generaron mucha discusión en la blogosfera, especialmente entre profesores de colegio. Si tiene poco tiempo, le recomiendo que lea primero el de 2011.
[12] Para el ejemplo de los vaqueros, el orden en que se aplican el IVA y el descuento a usted puede no importarle —en ambos casos termina pagando 43,20 dólares—, pero resulta de gran relevancia tanto para la tienda como para el gobierno. En la situación que plantea la dependienta, que paga impuestos en base al precio original, usted pagaría 4 dólares de impuestos, mientras que en la situación que usted plantea pagaría solo 3,20 dólares. ¿Cómo puede el precio final ser el mismo? Porque en la hipótesis de la dependienta, la tienda se queda con 39,20 dólares, mientras que en la suya se queda con 40 dólares. No estoy seguro de lo que exige la ley y puede variar de un lugar a otro, pero la idea lógica sería que el gobierno cobrara los impuestos en base al pago que la tienda, *de facto*, recibe. Solo el escenario que usted plantea satisface este criterio. Para más detalles, véase http://www.facebook.com/TeachersofMathematics/posts/166897663338316.
[13] Para acaloradas discusiones online sobre los méritos relativos de un plan Roth 401(k) frente a uno tradicional y si la ley conmutativa tiene algo que ver con estas cuestiones, véase el Finance Buff, «Commutative law of multiplication» (http://thefinancebuff.com/commutative-law-of-multiplication.html), y el Simple Dollar, «The new Roth 401(k) versus the traditional 401(k): Which is the better route?» (http://www.thesimpledollar.com/2007/06/20/the-new-roth-401k-versus-the-traditional401k-which-is-the-better-route/).
[14] Esta historia acerca de Murray Gell-Mann se narra en G. Johnson, *Strange Beauty*, Nueva York, Knopf, 1999, p. 55. En las propias palabras de Gell-Mann, se le ofreció la admisión en el temido MIT, al mismo tiempo que estaba «pensando en el suicidio, como corresponde a alguien rechazado por la Ivy League. Se me ocurrió, sin embargo (y es un ejemplo interesante de la no conmutación de operadores), que podría probar el MIT primero y suicidarme después, mientras que el orden inverso de los acontecimientos era imposible». Esta cita aparece en H. Fritzsch, *Murray Gell-Mann: Selected Papers*, Singapur, World Scientific, 2009, p. 298.
[15] Para una descripción de cómo Heisenberg y Dirac descubrieron el rol de las variables no conmutativas en la mecánica cuántica véase G. Farmelo, *The Strangest Man*, Nueva York, Basic Books, 2009, pp. 85-87.
[16] Un clip de la escena en la que el joven Christy se esfuerza en responder a la pregunta «¿Cuál es el veinticinco por ciento de un cuarto?» está disponible en http://www.tcm.com/mediaroom/video/223343/My-Left-Foot-Movie-Clip-25-Percent-of-a-Quarter.html.

[17] El blog de George Vaccaro (http://verizonmath.blogspot.com/) proporciona los exasperantes detalles de sus encontronazos con Verizon. La transcripción de su conversación con el servicio de atención al cliente está disponible en http://verizonmath.blogspot.com/2006/12/transcription-jt.html. La grabación de audio está en http://imgs.xkcd.com/verizon_billing.mp3.

[18] Para aquellos lectores a los que les resulta difícil aceptar que 1 = 0,9999…, el argumento que finalmente me convenció fue el siguiente: deben ser iguales, porque no hay hueco para encajar ningún otro decimal entre ellos. (Mientras que si dos decimales no son iguales, su media está entre ellos, al igual que un número infinito de otros decimales).

[19] Las sorprendentes propiedades de los números irracionales se examinan a un nivel matemático superior en la página de MathWorld «Irrational number», http://mathworld.wolfram.com/IrrationalNumber.html. El sentido en el que los dígitos de los números irracionales son aleatorios se aclara en http://mathworld.wolfram.com/NormalNumber.html.

[20] Para más información sobre Cornell, incluyendo su papel en Western Union y los primeros días del telégrafo, véase P. Dorf, *The Builder: A Biography of Ezra Cornell*, Londres, Macmillan, 1952; W. P. Marshall, *Ezra Cornell*, Whitefish, Montana, Kessinger Publishing, 2006; y una exposición online en homenaje al 200 cumpleaños de Cornell: http://rmc.library.cornell.edu/ezra/index.html.

[21] Viejos sistemas numéricos y los orígenes del sistema de valor posicional se examinan en V. J. Katz, *A History of Mathematics*, 2.ª ed., Boston, Addison Wesley Longman, 1998, y en C. B. Boyer y U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, 3.ª ed., Hoboken, Nueva Jersey, Wiley, 2011. Para un relato más familiar, véase C. Seife, *Zero*, Nueva York, Viking, 200, cap. 1 [trad. cast.: *Cero: la biografía de una idea peligrosa*, Castellón, Ellago ediciones, 2006].

[22] Mark Chu-Carroll aclara algunas de las características peculiares de los números romanos y la aritmética en esta entrada en su blog: http://scienceblogs.com/goodmath/2006/08/roman_numerals_and_arithmetic.php.

[23] Se hace una interesante exposición de matemática babilónica en N. Wade, «An exhibition that gets to the (square) root of Sumerian math», *The New York Times* (22 de noviembre de 2010), online en http://www.nytimes.com/2010/11/23/science/23babylon.html, acompañada por una presentación de diapositivas en http://www.nytimes.com/slideshow/2010/11/18/science/20101123-babylon.html.

[24] Esto bien podría ser una exageración. Se puede contar hasta doce con una mano empleando el dedo pulgar para indicar cada uno de los tres pequeños huesos (falanges) en los otros cuatro dedos. A continuación, puede utilizar los cinco dedos de la otra mano para realizar un seguimiento de cuántos conjuntos de doce ha contado. El sistema de base 60 utilizado por los sumerios puede haberse originado de esta manera. Para más información sobre esta hipótesis y otras especulaciones sobre los orígenes del sistema de base 60, véase G. Ifrah, *The Universal History of Numbers*, Hoboken, Nueva Jersey, Wiley, 200, cap. 9 [trad. cast.: *Historia universal de las cifras*, Madrid, Espasa, 2002].

[25] Para los puristas, Leah es en realidad veintiún meses mayor que Jo. Por lo tanto, la fórmula de Jo es solo una aproximación. ¡Obviamente!

[26] Feynman cuenta la historia del truco de Bethe para cuadrar los números cercanos a 50 en R. P. Feynman, *«Surely You're Joking, Mr. Feynman!»*, Nueva York, W. W. Norton and Company, 1985, p. 193.

[27] La identidad sobre el efecto de la igualdad de cambios porcentuales hacia arriba y hacia abajo en la bolsa puede demostrarse simbólicamente multiplicando $1 + x$ por $1 - x$, o geométricamente, dibujando un diagrama similar al utilizado para explicar el truco de Bethe. Si está usted de humor, pruebe ambos enfoques como ejercicio.

[28] La «mitad de su edad más siete», regla de la diferencia de edad aceptable en una relación amorosa, la llaman la «standard creepiness rule» [regla de repulsión estándar] en el cómic *xkcd:* http://xkcd.com/314/.

[29] La búsqueda de soluciones a ecuaciones cada vez más complicadas, de segundo grado a quinto grado, se relata con gran detalle en M. Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved*, Nueva York, Simon and Schuster, 2005 [trad. cast.: *La ecuación jamás resuelta*, Barcelona, Ariel, 2007].

[30] Para más información sobre el problema clásico de la duplicación del cubo, véase http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Doubling_the_cube.html.

[31] Para obtener más información sobre números imaginarios y complejos, sus aplicaciones y su accidentada historia, véase P. J. Nahin, *An Imaginary Tale*, Princeton, Princeton University Press, 1998, y B. Mazur, *Imagining Numbers*, Nueva York, Farrar, Straus and Giroux, 2003.

[32] Para una excelente aproximación periodística al trabajo de John Hubbard, véase J. Gleick, *Chaos*, Nueva York, Viking, 1987, p. 217 [trad. cast.: *Caos: La creación de una ciencia*, Barcelona, Crítica, 2012]. El acercamiento del propio Hubbard al método de Newton aparece en la sección 2.8 de J. Hubbard y B. B. Hubbard, *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms*, 4.ª ed., Ithaca, Nueva York, Matrix Editions, 2009.

Para los lectores que quieran profundizar en las matemáticas del método de Newton, una introducción más sofisticada pero de fácil lectura se ofrece en H.-O. Peitgen y P. H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer, 1986, cap. 6; véase también el artículo de A. Douady (colaborador de Hubbard) titulado «Julia sets and the Mandelbrot set» a partir de la p. 161 del mismo libro.

[33] Hubbard no fue el primer matemático en hacer preguntas sobre el método de Newton en el plano complejo; Arthur Cayley se había preguntado las mismas cosas en 1879. Él también observó ambos polinomios, cuadráticos y cúbicos, y se dio cuenta de que el primer caso era fácil y el segundo difícil. Aunque no podía saber nada de fractales, que se descubrieron un siglo más tarde, comprendió, claramente, que algo malo puede suceder cuando hay más de dos raíces. En su artículo de una página «Desiderata and suggestions: No.3 — the Newton-Fourier imaginary problem», *American Journal of Mathematics*, vol. 2, n.º 1 (marzo de 1879), p. 97, disponible online en http://www.jstor.org/pss/2369201, la frase final de Cayley es una maravilla de la subestimación: «The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty» [En el caso de una ecuación cuadrática, la solución es fácil y elegante, pero el caso siguiente, el de la ecuación cúbica, parece presentar dificultades considerables].

[34] Las instantáneas mostradas en este capítulo se calculan utilizando el método de Newton aplicado al polinomio $z^3 - 1$. Las raíces son las tres raíces cúbicas de 1. Para este caso, el algoritmo de Newton toma un punto z en el plano complejo y lo asigna a un nuevo punto:

$$z - (z^3 - 1)/(3z^2)$$

Este punto se convierte entonces en la siguiente z. Este proceso se repite hasta que z se acerca lo suficiente a una raíz o, de manera equivalente, hasta que $z^3 - 1$ se acerca lo suficiente a cero, donde «se acerca lo suficiente» denota una distancia muy corta, elegida arbitrariamente por la persona que programó el ordenador. A todos los puntos iniciales que llevan a una raíz concreta se les asigna el mismo color. Por lo tanto, el rojo marca todos los puntos que convergen a una raíz, el verde marca otra y el azul otra tercera.

Las instantáneas de las fractales resultantes de Newton fueron amablemente proporcionadas por Simon Tatham. Para más información sobre su obra, véase «Fractals derived from Newton-Raphson iteration», en su página web http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/newton/.

Teamfresh ha creado animaciones de vídeo del fractal de Newton. En la página web de Teamfresh, http://www.hd-fractals.com, aparecen sorprendentes y profundos acercamientos a otros fractales, incluyendo el famoso conjunto Mandelbrot.

[35] Para una introducción a los antiguos métodos indios para encontrar raíces cuadradas, véase D. W. Henderson y D. Taimina, *Experiencing Geometry*, 3.ª ed. ampliada y revisada, Nueva Jersey, Pearson Prentice Hall, 2005.

[36] Una gran colección de problemas está disponible en http://MathNEXUS.wwu.edu/Archive/oldie/list.asp.

[37] En la película de 1941 *Qué verde era mi valle* aparece un problema de bañera más complejo. Para ver un fragmento, http://www.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/index.html. Y ya que está ahí, eche un vistazo a este fragmento de la comedia de béisbol *Un entrenador de primera:* http://www.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/m4v/league.m4v. Contiene un problema acerca de pintar casas: «Si yo puedo pintar una casa en tres horas y tú en cinco, ¿cuánto tiempo nos llevará pintarla juntos?». La escena muestra a los jugadores de béisbol dando respuestas tontas. «Es sencillo, cinco por tres, o sea, quince». «No, no, no, mira, son ocho horas: cinco más tres es ocho». Tras varios errores más, un jugador por fin da en el clavo: 17/8 horas.

[38] Para libros acerca de grandes ecuaciones, véase M. Guillen, *Five Equations That Changed the World*, Nueva York, Hyperion, 1995 [trad. cast.: *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo*, Barcelona, Debate, 2003]; G. Farmelo, *It Must Be Beautiful*, Londres, Granta, 2002 [trad. cast.: *Fórmulas elegantes, grandes soluciones de la ciencia moderna*, Barcelona, Tusquets 2004]; y R. P. Crease, *The Great Equations*, Nueva York, W. W. Norton and Company, 2009. Hay también varias listas publicadas online. Les sugiero que empiecen por K. Chang, «What makes an equation beautiful?», *The New York Times* (24 de octubre de 2004), http://www.nytimes.com/2004/10/24/weekinreview/24chan.html. Para una de las pocas listas que incluyen la ecuación cuadrática, véase http://www4.ncsu.edu/~kaltofen/top10eqs/top10eqs.html.

[39] Se analizan muchos ejemplos en S. Gandz, «The algebra of inheritance: A rehabilitation of Al-Khwarizmi», *Osiris*, vol. 5 (1938), pp. 319-391.

[40] El enfoque de al-Jwarizmi a la ecuación cuadrática se explica en V. J. Katz, *A History of Mathematics*, 2.ª ed., Boston, Addison Wesley Longman, 1998, pp. 244-249.

[41] La broma acerca de los logaritmos es del episodio «In God We Strongly Suspect». Se retransmitió por primera vez el 11 de febrero de 1986, durante la segunda temporada de la serie. Un vídeo está disponible en http://opinionator.blogs.nytimes.com/2010/03/28/power-tools/.

[42] Para simplificar, me he referido a expresiones del tipo x^2 como funciones, aunque para ser más precisos debería hablar de «la función que mapea a x en x^2». Espero que este tipo de abreviaturas no causen confusión, ya que todos las hemos visto en los botones de la calculadora.

[43] Se puede ver un vídeo promocional de la fuente en el aeropuerto de Detroit, creada por WET Design, en http://www.youtube.com/watch?v=VSUKNxVXE4E. Existen también varios vídeos caseros disponibles en YouTube. Uno de los más vívidos es «Detroit Airport Water Feature» por PassTravelFool.
Will Hoffman y Paul Derek Boyle han filmado un inquietante vídeo de las parábolas (junto con sus primas exponenciales, curvas denominadas catenarias, así llamadas por la forma de cadenas colgantes) que están a nuestro alrededor en el día a día. Véase «WNYC/NPR's Radio Lab presents Parabolas (etc.)» online en http://www.youtube.com/watch?v=rdSgqHuI-mw. Aclaración: los cineastas dicen que este vídeo se inspiró en una historia que yo conté en un episodio de *Radiolab* («Yellow fluff and other curious encounters»), disponible en http://www.radiolab.org/2009/jan/12/).

[44] Para la historia de las aventuras de Britney Gallivan doblando papel, véase B. Gallivan, «How to fold a paper in half twelve times: An "impossible challenge" solved and explained», Pomona, CA: Historical Society of Pomona Valley, 2002, online en http://pomonahistorical.org/12times.htm. Para la perspectiva de un periodista, dirigida a niños, véase I. Peterson, «Champion paper-folder», *Muse* (julio/agosto de 2004), p. 33, disponible online en http://musemath.blogspot.com/2007/06/champion-paper-folder.html. Los MythBusters [Revientamitos] han intentado refutar el experimento de Britney en su programa de televisión.

[45] Para referencias y mayor análisis de las escalas musicales y nuestra percepción (aproximadamente) logarítmica del tono, véase J. H. McDermott y A. J. Oxenham, «Music perception, pitch, and the auditory system», *Current Opinion in Neurobiology*, vol. 18 (2008), pp. 1-12; http://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_(music); http://en.wikipedia.org/wiki/Musical_scale; y http://en.wikipedia.org/wiki/Piano_key_frequencies.
Como prueba de que nuestro sentido numérico innato también es logarítmico, véase S. Dehaene, V. Izard, E. Spelke y P. Pica, «Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures», *Science*, vol. 320 (2008), pp. 1217-1220. Muestras significativas de este estudio están disponibles en ScienceDaily (http://www.sciencedaily.com/releases/2008/05/080529141344.htm) y en un episodio de *Radiolab* llamado «Numbers» (http://www.radiolab.org/2009/nov/30/).

[46] Los antiguos babilonios, indios y chinos parecen haber tenido conocimiento del contenido del teorema de Pitágoras varios siglos antes de Pitágoras y los griegos. Para más información sobre la historia y el significado del teorema, así como un estudio de las muchas e ingeniosas maneras de demostrarlo, véase E. Maor, *The Pythagorean Theorem*, Princeton, Princeton University Press, 2007.

[47] En la página xiii de su libro, Maor explica que la palabra «hipotenusa» significa «estirada debajo de» y señala que esto tiene sentido si el triángulo equilátero se observa con la hipotenusa en la parte inferior, como se representa en los *Elementos* de Euclides. También señala que esta interpretación encaja bien con la palabra china para hipotenusa: «*hsien*, a string stretched between two points (as in a lute)» *[hsien*, una cuerda estirada entre dos puntos (como en un laúd)].

[48] Los niños y sus padres disfrutarán de las ilustraciones comestibles del teorema de Pitágoras sugeridas por George Hart en su publicación para el Museo de Matemáticas «Pythagorean crackers» [Galletas pitagóricas]: http://momath.org/home/pythagorean-crackers/.

[49] Si es de los que disfrutan viendo diferentes demostraciones, una colección de docenas de ellas, muy bien comentada —con creadores que van desde Euclides a Leonardo da Vinci o el presidente James Garfield—, está disponible en el blog de Alexander Bogomolny *Cut the Knot*. Véase http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml.

[50] Con un poco de suerte, la primera demostración del capítulo debería haberle arrancado un «¡ajá!». Pero para que el argumento sea completamente sólido, también tenemos que demostrar que las imágenes no nos engañan, o, en otras palabras, que realmente tienen las propiedades que parecen tener. Una prueba más rigurosa establecería, por ejemplo, que el marco exterior es verdaderamente un cuadrado y que los cuadrados medianos y pequeños se reúnen en un solo punto, como se muestra. Comprobar estos detalles es divertido y no demasiado difícil.
Estos son los pasos que faltan en la segunda prueba. Tome esta ecuación:

$$a/d = c/a$$

y reorganícela para obtener:

$$d = a^2/c$$

Del mismo modo, masajear otra de las ecuaciones da:

$$e = b^2/c$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones anteriores para d y e en la ecuación $c = d + e$ da:

$$c = a^2/c + b^2/c$$

Luego, multiplicar ambos lados por c da la fórmula deseada:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

[51] Para los trece libros de los *Elementos*, en un único volumen con abundantes diagramas, véase *Euclid's Elements*, editado por D. Densmore, traducido por T. L. Heath, Santa Fe, Nuevo México, Green Lion Press, 2002. Otra excelente opción es un documento PDF de descarga gratuita obra de Richard Fitzpatrick, que ofrece su traducción moderna al inglés de los *Elementos* de Euclides, disponible en http://farside.ph.utexas.edu/euclid.html. [Trad. cast.: *Elementos*, 3 vols., Madrid, Gredos, 1991-1996].

[52] Para más información acerca del respeto de Thomas Jefferson hacia Euclides y Newton y su uso del enfoque axiomático en la Declaración de la Independencia, véase I. B. Cohen, *Science and the Founding Fathers*, Nueva York, W. W. Norton and Company, 1995, pp. 108-134, así como J. Fauvel, «Jefferson and mathematics», http://www.math.virginia.edu/Jefferson/jefferson.htm, en especial la página acerca de la Declaración de Independencia: http://www.math.virginia.edu/Jefferson/jeff_r(4).htm.

[53] Para la versión de Euclides de la prueba del triángulo equilátero, en griego, véase http://en.wikipedia.org/wiki/File:Euclid-proof.jpg.

[54] He pasado por alto una serie de sutilezas en las dos pruebas presentadas en este capítulo. Por ejemplo, en la prueba del triángulo equilátero, implícitamente asumimos (como hizo Euclides) que los dos círculos se intersectan en alguna parte; concretamente, en el punto que denominamos *C*. Pero la existencia de esa intersección no está garantizada por ninguno de los axiomas de Euclides, se necesita un axioma adicional acerca de la continuidad de los círculos. Bertrand Russell, entre otros, señaló esta laguna: B. Russell, «The Teaching of Euclid», *Mathematical Gazette*, vol. 2, n.º 33 (1902), pp. 165-167, disponible online en http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Extras/Russell_Euclid.html.

Otra sutileza consiste en el uso implícito del postulado de las paralelas en la prueba de que los ángulos de un triángulo suman 180 grados. Ese postulado es lo que nos permitió construir la línea paralela a la base del triángulo. En otros tipos de geometría (conocidos como geometrías no euclídeas), puede no existir *ninguna* línea paralela a la base, o podrían existir *infinidad* de ellas. En estas geometrías, que son tan lógicas y coherentes como la euclidiana, los ángulos de un triángulo no siempre suman 180 grados. Por lo tanto, la demostración pitagórica ofrecida aquí no es solo impresionantemente elegante, sino que revela algo profundo acerca de la naturaleza del espacio mismo. Para mayor profundización en estas cuestiones, véase la publicación en el blog de A. Bogomolny «Angles in triangle add to 180°», http://www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/AnglesInTriangle.shtml, y el artículo de T. Beardon, «When the angles of a triangle don't add up to 180 degrees», http://nrich.maths.org/1434.

[55] Para información sobre las secciones cónicas y referencias a la vasta literatura sobre ellas, véase http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html y http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section. Para los lectores con cierta formación matemática, una gran cantidad de información interesante e inusual ha sido recogida por James B. Calvert en su página web; véase «Ellipse».

[56] Ganará en intuición al ver las animaciones online creadas por Lou Talman y analizadas en su página web «The geometry of the conic sections», http://rowdy.mscd.edu/~talmanl/HTML/GeometryOfConicSections.html. En concreto, consulte http://clem.mscd.edu~talmanl/HTML/ParabolicReflector.html y fíjese en un único fotón a medida que se aproxima y rebota en el reflector parabólico. Luego, observe los fotones que se desplazan juntos; no volverá a broncearse la cara con un reflector de sol. La animación análoga para una elipse se muestra en http://rowdy.mscd.edu/~talmanl/HTML/EllipticReflector.html.

[57] Los gráficos que se muestran en el texto corresponden a Júpiter, Florida, con datos de 2011. Para mayor comodidad, las horas de salida y puesta de sol se han expresado en relación con Eastern Standard Time (la zona horaria UTC-05:00) durante todo el año para evitar las rupturas artificiosas provocadas por el horario de verano. Puede crear gráficos similares de la salida y la puesta del sol de su propia ubicación en páginas web como http://ptaff.ca/soleil/?lang=en_CA o http://www.gaisma.com/en/.

Los alumnos parecen sorprenderse con estas gráficas (por ejemplo, algunos esperan que las curvas tengan aspecto triangular, en lugar de suave y redondeado), lo que las convierte en actividades instructivas a nivel de secundaria o bachillerato. Para el estudio de un caso pedagógico, véase: A. Friedlander y T. Resnick, «Sunrise, sunset», *Montana Mathematics Enthusiast*, vol. 3, n.º 2 (2006), pp. 249-255, disponible en http://www.math.umt.edu/tmme/vol3no2/TMMEvol3no2_Israel_pp249_255.pdf.

Elaborar fórmulas de las horas de salida y puesta del sol es complicado, tanto en términos matemáticos como físicos. Véase, por ejemplo, la página web de T. L. Watts «Variation in the time of sunrise», en http://www.physics.rutgers.edu/~twatts/sunrise/sunrise.html. El análisis de Watts aclara por qué las horas de salida y puesta del sol no varían en forma de ondas sinusoidales simples durante todo el año. También incluyen un segundo

armónico (una onda sinusoidal con un periodo de seis meses), debido principalmente a un sutil efecto de inclinación de la Tierra que provoca una variación semestral en el mediodía local, la hora del día en la que el sol está más alto en el cielo. Afortunadamente, este término es el mismo en las fórmulas para el amanecer y la puesta del sol. Así que, cuando resta una a la otra para calcular la longitud del día (el número de horas entre la salida y la puesta del sol), el segundo armónico se anula. Lo que queda es una onda sinusoidal casi perfecta.
Se puede encontrar más información acerca de este tema en la Red, buscando «la ecuación del tiempo» (en serio, ¡así se llama!). Un buen punto de partida es la página web de K. Taylor, «The equation of time: Why sundial time differs from clock time depending on time of year», http://myweb.tiscali.co.uk/moonkmft/Articles/EquationOfTime.html, o la página de Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_time.

[58] El tema se analiza con cariño en E. Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton, Princeton University Press, 1998.

[59] Para una visión general de los patrones en la naturaleza, véase P. Ball, *The Self-Made Tapestry*, Nueva York, Oxford University Press, 1999. Los métodos matemáticos en este campo se presentan a nivel de posgrado en R. Hoyle, *Pattern Formation*, Cambridge, Cambridge University Press, 2006. Para los análisis matemáticos de rayas de cebra, patrones de mariposas y otros ejemplos biológicos de formación de patrones, véase J. D. Murray, *Mathematical Biology: II. Spatial Models and Biomedical Applications*, 3.ª ed., Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer, 2003.

[60] Las conexiones entre la formación de patrones biológicos y la cosmología son uno de los deleites que se encuentran en el libro de Janna Levin *How the Universe Got Its Spots*, Princeton, Princeton University Press, 2002. [trad. cast.: *Cómo le salieron manchas al Universo*, Madrid, Lengua de Trapo, 2002]. Está estructurado como una serie de cartas no enviadas a su madre y se mueve con gracia por la historia y las ideas de las matemáticas y la física, entretejiéndolas con el diario íntimo de una joven científica, que se embarca en su carrera.

[61] Para una breve introducción a la cosmología y la inflación, véanse dos artículos de Stephen Battersby: «Introduction: Cosmology», *New Scientist* (4 de septiembre de 2006), disponible online en http://www.newscientist.com/article/dn9988-introduction-cosmology.html, y «Best ever map of the early universe revealed», *New Scientist* (17 de marzo de 2006), online en http://www.newscientist.com/article/dn8862-best-ever-map-of-the-early-universe-revealed.html. El caso de la inflación sigue siendo controvertido; sin embargo, sus fortalezas y debilidades se explican en P. J. Steinhardt, «The inflation debate: Is the theory at the heart of modern cosmology deeply flawed?», *Scientific American* (abril de 2011), pp. 18-25.

[62] La historia y el legado intelectual de las paradojas de Zenón se analizan en J. Mazur, *Zeno's Paradox*, Nueva York, Plume, 2008.

[63] Para una historia deliciosamente sesgada e ingeniosa de pi, véase P. Beckmann, *A History of Pi*, Nueva York, St. Martin's Press, 1976.

[64] *Nova*, la serie de televisión de PBS, emitió un episodio maravilloso sobre Arquímedes, el infinito y los límites, llamado «Infinite Secrets». Se emitió por primera vez el 30 de septiembre de 2003. La página web del programa (http://www.pbs.org/wgbh/nova/archimedes/ ofrece muchos recursos online, incluyendo la transcripción del programa y demostraciones interactivas.

[65] Para los lectores deseosos de ver los detalles matemáticos del método por agotamiento de Arquímedes, Neal Carothers ha utilizado la trigonometría (equivalente a la gimnástica pitagórica en la que se apoyó Arquímedes) para obtener los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos entre los que está atrapado el círculo; véase http://personal.bgsu.edu/~carother/pi/Pi3a.html. La página web de Peter Alfeld «Archimedes and the computation of pi» cuenta con un sistema interactivo de applet de Java, que permite cambiar el número de lados de los polígonos; véase http://www.math.utah.edu/~alfeld/Archimedes/Archimedes.html. Los pasos independientes en el argumento original de Arquímedes son de interés histórico pero es posible que le resulten decepcionantemente oscuros; véase http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes.html.

[66] Cualquier persona a la que resulten curiosos los heroicos cálculos de pi a un inmenso número de dígitos disfrutará del perfil que Richard Preston realiza de los hermanos Chudnovsky. Titulada «The mountains of pi», esta pieza cariñosa y sorprendentemente cómica apareció en la edición del *New Yorker* del 2 de marzo de 1992, y más recientemente como un capítulo en R. Preston, *Panic in Level Four*, Nueva York, Random House, 2008.

[67] Para una introducción a los conceptos básicos del análisis numérico, véase el manual de W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery, *Numerical Recipes*, 3.ª ed., Nueva York, Cambridge University Press, 2007.

[68] D. M. Bressoud, «The crisis of calculus», Mathematical Association of America (abril de 2007), disponible en http://www.maa.org/columns/launchings/launchings_04_07.html.

[69] Para clips de vídeo con los mates más espectaculares de Jordan, véase http://www.youtube.com/watch?v=H8M2NgjvicA.

[70] Para una colección de problemas de cálculo del señor Joffray, clásicos y originales, véase S. Strogatz, *The Calculus of Friendship*, Princeton, Princeton University Press, 2009.

[71] Diversos artículos, vídeos y sitios web presentan los detalles de la ley de Snell y su derivación del principio de Fermat (que establece que la luz toma el camino de menor tiempo). Por ejemplo, véase M. Golomb, «Elementary proofs for the equivalence of Fermat's principle and Snell's law», *American Mathematical Monthly*, vol. 71, n.º 5 (mayo de 1964), pp. 541-543, y http://en.wikibooks.org/wiki/Optics/Fermat%27s_Principle. Otros proporcionan enfoques históricos; véase http://en.wikipedia.org/wiki/Snell%27s_law.

El principio de Fermat fue un precursor temprano del principio más general de acción mínima. Para discusiones entretenidas y profundamente esclarecedoras de este principio, incluyendo su base en la mecánica cuántica, véase R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands, «The principle of least action», *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 2, cap. 19, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1964, y R. Feynman, *QED*, Princeton, Princeton University Press, 1988.

[72] En pocas palabras, la sorprendente proposición de Feynman es que la naturaleza realmente intenta todos los caminos. Sin embargo, casi todas las rutas se anulan entre sí a través de un análogo cuántico de interferencia destructiva, a excepción de los que están muy cerca de la ruta clásica, donde se minimiza la acción (o, más precisamente, se hace estacionaria). Ahí es donde la interferencia cuántica se convierte en constructiva, aumentando en gran medida la probabilidad de observar esos caminos. Esta, en el enfoque de Feynman, es la razón por la que la naturaleza obedece principios mínimos. La clave es que vivimos en el macroscópico mundo de la existencia diaria, donde las acciones son colosales en comparación con la constante de Planck. En ese límite clásico, la interferencia cuántica destructiva se vuelve extremadamente fuerte y destruye prácticamente todo lo que podría suceder.

[73] Para más información acerca de las formas en que el cálculo integral se ha utilizado para ayudar a los investigadores del cáncer, vease D. Mackenzie, «Mathematical modeling of cancer», *SIAM News*, vol. 37 (enero/febrero de 2004), y H. P. Greenspan, «Models for the growth of a solid tumor by diffusion», *Studies in Applied Mathematics* (diciembre de 1972), pp. 317-340.

[74] La región común a dos cilindros idénticos circulares cuyos ejes se cruzan en ángulo recto se conoce también como sólido de Steinmetz o bicilindro. Para más información, véase http://mathworld.wolfram.com/SteinmetzSolid.html y http://en.wikipedia.org/wiki/Steinmetz_solid. La página de Wikipedia también incluye una animación por ordenador, muy útil, que muestra el sólido de Steinmetz emergiendo, fantasmal, de los cilindros que se intersectan. Su volumen se puede calcular de manera directa pero opaca por las técnicas modernas.

Arquímedes y Zu Chongzhi conocían una solución antigua y más sencilla. No utiliza nada más que el método de corte y una comparación entre las áreas de un cuadrado y un círculo. Para una exposición maravillosamente clara, véase la columna de Martin Gardner «Mathematical games: Some puzzles based on checkerboards», *Scientific American*, vol. 207 (noviembre de 1962), p. 164. Y respecto a Arquímedes y Zu Chongzhi, véase: Arquímedes, *The method*, traducción al inglés a cargo de T. L. Heath (1912), reimpreso por Dover (Nueva York, 1953) [trad. cast.: *El método*, Madrid, Alianza, 1986], y T. Kiang, «An old Chinese way of finding the volume of a sphere», *Mathematical Gazette*, vol. 56 (mayo de 1972), pp. 88-91.

Moreton Moore señala que el bicilindro tiene aplicación en la arquitectura: «Los romanos y los normandos, en el uso de la bóveda de cañón para cubrir sus edificios, estaban familiarizados con la geometría de cilindros intersectados, donde dos bóvedas se cruzaban la una con la otra para formar una bóveda de crucería». Para esto, así como para aplicaciones a la cristalografía, véase M. Moore, «Symmetrical intersections of right circular cylinders», *Mathematical Gazette*, vol. 58 (octubre de 1974), pp 181-185.

[75] Demostraciones interactivas del bicilindro y otros problemas de cálculo integral están disponibles online en Wolfram Demonstrations Project.

Mamikon Mnatsakanian, en Caltech (Instituto Tecnológico de California), ha producido una serie de animaciones que ilustran el espíritu de Arquímedes y el poder de cortar. Mi favorito es http://www.its.caltech.edu/~mamikon/Sphere.html, que retrata una hermosa relación entre los volúmenes de una esfera, cierto doble cono y un cilindro, cuya altura y radio encajan con los de la esfera. También muestra lo mismo de manera más física, drenando un volumen de líquido imaginario del cilindro y echándolo en las otras dos formas; véase http://www.its.caltech.edu/~mamikon/SphereWater.html.

Argumentos igualmente mecánicos y elegantes al servicio de las matemáticas se ofrecen en M. Levi, *The Mathematical Mechanic*, Princeton, Princeton University Press, 2009.

[76] Para revisar cómo Arquímedes aplica su método mecánico al problema de encontrar el volumen del bicilindro, véase T. L. Heath (ed.), Proposition 15, *The Method of Archimedes, Recently Discovered by Heiberg*, Nueva York, Cosimo Classics, 2007, p. 48.

En la página 13 del mismo volumen, Arquímedes confiesa que ve su método mecánico más como una manera de descubrir teoremas, que de demostrarlos: «Vi ciertas cosas con claridad gracias a un método mecánico, aunque después tuvieran que ser demostradas por la geometría, puesto que su investigación por el citado método no proporciona una demostración real. Pero es, por supuesto, más fácil, cuando previamente hemos adquirido, a través del método, algo de conocimiento de las preguntas, suministrar la prueba, de lo que es encontrarla sin ningún conocimiento previo».
Para un enfoque popular de la obra de Arquímedes, véase R. Netz y W. Noel, *The Archimedes Codex*, Cambridge, Massachusetts, Da Capo Press, 2009 [trad. cast.: *El código de Arquímedes*, Madrid, Temas de Hoy, 2007].
[77] Para una introducción completa, véase E. Maor, *e: The Story of a Number*, Princeton, Princeton University Press, 1994. Los lectores con formación en cálculo disfrutarán el artículo de B. J. McCartin, ganador del premio Chauvenet: «*e*: The master of all», *Mathematical Intelligencer*, vol. 28, n.º 2 (2006), pp. 10-21. Una versión en PDF está disponible en http://mathdl.maa.org/images/upload_library/22/Chauvenet/mccartin.pdf.
[78] La fracción de empaquetamiento esperada para las parejas que se sientan en un cine al azar se ha estudiado en otros terrenos de la literatura científica. Surgió primero en química orgánica; véase P. J. Flory, «Intramolecular reaction between neighboring substituents of vinyl polymers», *Journal of the American Chemical Society*, vol. 61 (1939), pp. 1518-1521. El número mágico $1/e^2$ aparece en la columna superior derecha de la página 1519. Un tratamiento más reciente relaciona esta cuestión con el problema del estacionamiento al azar, un rompecabezas clásico en la teoría de la probabilidad y física estadística; véase W. H. Olson, «A Markov chain model for the kinetics of reactant isolation», *Journal of Applied Probability*, vol. 15, n.º 4 (1978), pp. 835-841. Los científicos en computación han abordado cuestiones similares en sus estudios de algoritmos «de emparejamiento aleatorio y codicioso» para emparejar nodos cercanos de una red; véase M. Dyer y A. Frieze, «Randomized greedy matching», *Random Structures and Algorithms*, vol. 2 (1991), pp. 29-45.
[79] La cuestión de cuándo hay que dejar de salir y decidirse por un compañero también se ha estudiado en varias formas, dando lugar a denominaciones tales como «el problema del prometido», «el problema del matrimonio», «el problema del molesto pretendiente» y «el problema de la dote del sultán». Pero la denominación más común hoy en día es «el problema de la secretaria». La situación a imaginar es que usted está tratando de contratar a la mejor secretaria entre un grupo determinado de candidatas. Entrevista a las candidatas de una en una y tiene que decidir en el acto si contratar a la persona en cuestión o decirle adiós para siempre. Para una introducción a las matemáticas y la historia de este maravilloso acertijo, véase http://mathworld.wolfram.com/SultansDowryProblem.html y http://en.wikipedia.org/wiki/Secretary_problem. Para más información véase T. S. Ferguson, «Who solved the secretary problem?», *Statistical Science*, vol. 4, n.º 3 (1989), pp. 282-289. Una clara exposición de cómo resolver el problema se ofrece en http://www.math.uah.edu/stat/urn/Secretary.xhtml. Para una introducción al amplio tema de la teoría de la parada óptima, véase T. P. Hill, «Knowing when to stop: How to gamble if you must — the mathematics of optimal stopping», *American Scientist*, vol. 97 (2009), pp 126-133.
[80] Para modelos de relaciones amorosas basadas en ecuaciones diferenciales, véase la sección 5.3 de S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Nueva York, Perseus, 1994.
[81] Para el anagrama de Newton, véase página vii en V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer, 1994.
[82] Caos en el problema de los tres cuerpos se analiza en I. Peterson, *Newton's Clock*, Nueva York, W. H. Freeman, 1993 [trad. cast.: *El reloj de Newton: caos en el sistema solar*, Madrid, Alianza, 1995].
[83] Para la cita sobre cómo el problema de los tres cuerpos provocaba dolor de cabeza a Newton, véase D. Brewster, *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton*, Edimburgo, Thomas Constable and Company, 1855, vol. 2, p. 158.
[84] Una gran introducción al cálculo vectorial y a las ecuaciones de Maxwell, y quizá el mejor manual que he leído nunca, es E. M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, 2.ª ed., Cambridge, Cambridge University Press, 2011 [trad. cast.: *Electricidad y magnetismo*, Barcelona, Ed. Reverté, 2005]. Otro clásico es H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That*, 4.ª ed., Nueva York, W. W. Norton and Company, 2005.
[85] Estas palabras las escribo durante el 150 aniversario del ensayo de Maxwell de 1861 «On physical lines of force» [Sobre las líneas físicas de fuerza]. Véase especialmente la tercera parte, «The theory of molecular vortices applied to statical electricity» [La teoría de los vórtices moleculares aplicada a la electricidad estática], *Philosophical Magazine* (abril y mayo de 1861), pp. 12-24, disponible en http://en.wikisource.org/wiki/On_Physical_Lines_of_Force y escaneado del original en http://www.vacuum-physics.com/Maxwell/maxwell_oplf.pdf.
El ensayo original merece una ojeada. Un punto culminante se produce justo debajo de la ecuación 137, donde Maxwell —un hombre sobrio no propenso a la teatralidad— no pudo resistir poner en cursiva la implicación más

revolucionaria de su obra: «La velocidad de las ondulaciones transversales en nuestro hipotético medio, calculada a partir de los experimentos electromagnéticos de M. M. Kohlrausch y Weber, coincide de un modo tan exacto con la velocidad de la luz calculada a partir de los experimentos ópticos de M. Fizeau que apenas se puede obviar la inferencia de que *la luz consiste en ondulaciones transversales del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos*».

[86] Para el trabajo de Jane Wang sobre el vuelo de la libélula, véase «Two dimensional mechanism for insect hovering», *Physical Review Letters*, vol. 85, n.º 10 (septiembre de 200), pp. 2216-2219, y Z. J. Wang, «Dragonfly flight», *Physics Today*, vol. 61, n.º 10 (octubre de 2008), p. 74. Sus ensayos se pueden también descargar de http://dragonfly.tam.cornell.edu/insect.html. El vídeo del vuelo de una libélula está en la parte inferior de http://ptonline.aip.org/journals/doc/PHTOAD-ft/vol_61/iss_10/74_1.shtml.

[87] Al parecer, Einstein también deseó ser una mosca en la pared en el estudio de Maxwell. Tal y como escribió en 1940: «Imagine cómo se sintió Maxwell cuando las ecuaciones diferenciales que había formulado le demostraron que los campos electromagnéticos se esparcen en forma de ondas polarizadas y a la velocidad de la luz. A pocos hombres en el mundo se les ha concedido una experiencia así». Véase p. 489 en A. Einstein, «Considerations concerning the fundaments of theoretical physics», *Science*, vol. 91 (24 de mayo de 1940), pp. 487-492 (disponible online en http://www.scribd.com/doc/30217690/Albert-Einstein-Considerations-Concerning-the-Fundaments-of-Theoretical-Physics).

[88] Las ecuaciones de Maxwell son a menudo retratadas como un triunfo de la razón pura, pero Simon Schaffer, un historiador de la ciencia de Cambridge, ha argumentado que fueron igualmente motivadas por el reto tecnológico de la época: el problema de la transmisión de señales a lo largo de los cables telegráficos submarinos. Véase S. Schaffer, «The laird of physics», *Nature*, vol. 471 (2011), pp. 289-291.

[89] Para el nuevo mundo de extracción de datos, véase S. Baker, *The numerati*, Boston, Houghton Mifflin Harcourt, 2008 [trad. cast.: *Numerati*, Barcelona, Seix Barral, 2011], e I. Ayres, *Super Crunchers*, Nueva York, Bantam, 2007.

[90] M. Lewis, *Moneyball*, Nueva York, W. W. Norton and Company, 2003.

[91] N. G. Mankiw, «A course load for the game of life», *The New York Times* (4 de septiembre de 2010).

[92] D. Brooks, «Harvard-bound? Chin up», *The New York Times* (2 de marzo de 2006).

[93] Para una introducción ilustrativa a la estadística, amenizada por una historia bien contada, véase D. Salsburg, *The Lady Tasting Tea*, Nueva York, W. H. Freeman, 2001, y L. Mlodinow, *The Drunkard's Walk*, Nueva York, Pantheon, 2008 [trad. cast.: *El andar del borracho*, Barcelona, Crítica, 2010].

[94] Si nunca ha visto una tabla de Galton en acción, consulte las demostraciones disponibles en YouTube. Uno de los vídeos más espectaculares utiliza arena en lugar de bolas; véase http://www.youtube.com/watch?v=xDIyAOBa_yU.

[95] Puede encontrar su lugar en la distribución de alturas utilizando el analizador online en http://www.shortsupport.org/Research/analyzer.html. Basado en datos de 1994, muestra qué fracción de la población estadounidense es más baja o más alta que una altura determinada. Para datos más recientes, véase M. A. McDowell et ál., «Anthropometric reference data for children and adults: United States, 2003-2006», *National Health Statistics Reports*, n.º 10 (22 de octubre de 2008), disponible online en http://www.cdc.gov/nchs/data/nhsr/nhsr010.pdf.

[96] OkCupid es la página de citas gratuita más grande de Estados Unidos, con siete millones de miembros activos en el verano de 2011. Sus estadísticos realizan análisis originales sobre los datos anónimos agregados por los miembros y después publican sus resultados y perspectivas en su blog OkTrends.

[97] Mark Newman tiene una gran introducción a este tema en M. E. J. Newman, «Power laws, Pareto distributions and Zipf's law», *Contemporary Physics*, vol. 46, n.º 5 (2005), pp. 323-351 (disponible online en http://www-personal.umich.edu/~mejn/courses/2006/cmplxsys899/powerlaws.pdf). Este artículo incluye gráficos de frecuencia de palabras en *Moby Dick*, la magnitud de los terremotos en California de 1910 a 1992, el patrimonio de las 400 personas más ricas de Estados Unidos en 2003 y muchas de las distribuciones con cola pesada mencionadas en este capítulo. Una visión anterior aunque igualmente excelente de las leyes de potencia es M. Schroder, *Fractals, Chaos, Power Laws*, Nueva York, W. H. Freeman, 1991.

[98] He tomado prestado el ejemplo de C. Seife, *Proofiness*, Nueva York, Viking, 2010. La transcripción del discurso del presidente Bush está disponible en http://georgewbush-whitehouse.archives.gov/news/releases/2004/02/print/20040219-4.html. Las cifras utilizadas en el texto están basadas en el análisis de FactCheck.org (un proyecto no partidista del Centro Annenberg de Políticas Públicas de la Universidad de Pensilvania), disponible online en http://www.factcheck.org/here_we_go_again_bush_exaggerates_tax.html, y en este análisis publicado por el Centro —no partidista— de Política Tributaria: W. G. Gale, P. Orszag e I. Shapiro, «Distributional effects of the 2001 and 2003 tax cuts and their financing», http://www.taxpolicycenter.org/publications/url.cfm?ID=411018.

[99] B. Mandelbrot y R. L. Hudson, *The (Mis)Behavior of Markets*, Nueva York, Basic Books, 2004; N. N. Taleb, *The Black Swan*, Nueva York, Random House, 2007 [trad. cast.: *El cisne negro*, Barcelona, Planeta, 2012].

[100] Estas tres palabras no siempre se utilizan como sinónimos. Cuando los estadísticos hablan de una larga cola, se refieren a algo distinto de aquello a lo que se refieren los que se dedican a los negocios o la tecnología. Por ejemplo, en el artículo en *Wired* de Chris Anderson «La larga cola», de octubre de 2004 (http://www.wired.com/wired/archive/12.10/tail.html) y en su libro homónimo, se refiere al alto número de películas, libros, canciones y demás obras ocultas a la mayor parte de la población, pero que sin embargo tienen un atractivo nicho y así sobreviven online. En otras palabras, para él, la larga cola son los millones de personitas; para los estadísticos, la larga cola son las escasas personas grandes: los superricos o los grandes terremotos.

La diferencia es que Anderson cambia los ejes en sus gráficos, que es algo así como mirar desde la otra parte del telescopio. Su convención es lo opuesto a la utilizada por los estadísticos en sus gráficos de distribuciones acumulativas, pero tiene una larga tradición que se remonta a Vilfredo Pareto, un ingeniero y economista que estudió las distribuciones de renta en los países europeos a finales del siglo XIX. En resumen, Anderson y Pareto trazan la frecuencia como una función de rango, mientras que Zipf y los estadísticos trazan el rango como una función de frecuencia. La misma información se muestra en ambos casos, pero con los ejes al revés.

Esto conduce a confusión en la literatura científica. Véase http://www.hpl.hp.com/research/idl/papers/ranking/ranking.html para un tutorial de Lada Adamic aclarando esto. Mark Newman también clarifica esta cuestión en su ensayo acerca de leyes potencia antes mencionado.

[101] Un manual que explica bien la probabilidad condicional y el teorema de Bayes es S. M. Ross, *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 4.ª ed., Waltham, Massachusetts, Academic Press, 2009. Para una historia del reverendo Bayes y la controversia que rodeó su aproximación a la inferencia probabilística, vease S. B. McGrayne, *The Theory That Would Not Die*, New Haven, Connecticut, Yale University Press, 2011.

[102] La respuesta a la parte (a) del problema de la planta enferma es 59 por ciento. La respuesta a la parte (b) es 27/41 o, aproximadamente, 65,85 por ciento. Para obtener estos resultados, basándose en la información dada, imagine 100 plantas enfermas y averigüe cuántas de ellas (de media) son o no regadas; luego cuántas de ellas mueren. Esta pregunta aparece, aunque con palabras y cifras ligeramente diferentes, como problema 29, en la p. 84 del texto de Ross.

[103] El estudio de cómo interpretan los doctores los resultados de las mamografías se describe en G. Gigerenzer, *Calculated Risks*, Nueva York, Simon and Schuster, 2002, cap. 4.

[104] Para anécdotas e impresiones acerca de la probabilidad condicional y sus aplicaciones en el mundo real, así como para la forma en que se malinterpreta, véase J. A. Paulos, *Innumeracy*, Nueva York, Vintage, 1990 [trad. cast.: *El hombre anumérico*, Barcelona, Tusquets, 1990], y L. Mlodinow, *The Drunkard's Walk*, Nueva York, Vintage, 2009 [trad. cast.: *El andar del borracho*, Barcelona, Crítica, 2010].

[105] Para ampliar información sobre el caso de O. J. Simpson y el debate sobre mujeres maltratadas en un contexto más amplio, véase el cap. 8 de Gigerenzer, *Calculated Risks*. Las citas relativas al juicio de Simpson y la velocidad a la que las mujeres maltratadas son asesinadas por sus parejas aparecieron en A. Dershowitz, *Reasonable Doubts*, Nueva York, Touchstone, 1997, pp. 101-104.

La teoría de la probabilidad se aplicó por primera vez de manera correcta en el juicio de Simpson en 1995. El análisis presentado en este capítulo se basa en el propuesto por I. J. Good en «When batterer turns murderer», *Nature*, vol. 375 (1995), p. 541, y refinado con «When batterer becomes murderer», *Nature*, vol. 381 (1996), p. 481. Su análisis está bien redactado en términos de relaciones de probabilidad y teorema de Bayes, en lugar de en el enfoque, más intuitivo, de frecuencia natural empleado aquí y en el libro de Gigerenzer. (Dicho sea de paso, Good tuvo una carrera interesante. Además de sus muchas aportaciones a la teoría de la probabilidad y a las estadísticas bayesianas, ayudó a romper el código Enigma nazi durante la Segunda Guerra Mundial e introdujo el concepto futurista ahora conocido como singularidad tecnológica).

Para un análisis independiente que llega, en esencia, a la misma conclusión y que también se publicó en 1995, véase J. F. Merz y J. P. Caulkins, «Propensity to abuse — propensity to murder?», *Chance*, vol. 8, n.º 2 (1995), p. 14. Las ligeras diferencias entre ambos enfoques se revisan en J. B. Garfield y L. Snell, «Teaching bits: A resource for teachers of statistics», *Journal of Education Statistics*, vol. 3, n.º 2 (1995), disponible online en http://www.amstat.org/publications/jse/v3n2/resource.html.

[106] He aquí como Dershowitz parece haber calculado que menos de 1 de cada 2500 maltratadores al año asesinan a su compañera. En la p. 104 de su libro *Reasonable Doubts*, cita una estimación de que en 1992, entre 2,5 y 4 millones de mujeres en Estados Unidos fueron maltratadas por sus maridos, novios o exnovios. Ese mismo año, de acuerdo con los informes del FBI (http://www.fbi.gov/about-us/cjis/ucr/ucr), 913 mujeres fueron asesinadas por sus maridos y 519 fueron asesinadas por sus novios o exnovios. Dividiendo el total de 1432 homicidios por 2,5 millones de

maltratos, corresponde a 1 asesinato por cada 1746 maltratos, mientras que empleando el estimado de 4 millones de maltratos al año, la cifra es de 1 asesinato por cada 2793 maltratos. Parece que Dershowitz eligió 2500 como cifra redonda entre ambos extremos.

Lo que no está claro es qué proporción de las mujeres asesinadas había sido previamente maltratada por estos hombres. Parece que Dershowitz asumía que casi todas las víctimas de homicidio habían sido previamente maltratadas. Parece que la intención de Dershowitz era dejar claro que incluso cuando la tasa se sobreestima de esta manera, la proporción es todavía «infinitesimal».

Algunos años después de que se dictara el veredicto del caso Simpson, Dershowitz y el matemático John Allen Paulos se enzarzaron en una acalorada discusión a través de las cartas al director de *The New York Times*. La cuestión era si las pruebas de un historial de violencia conyugal debían ser consideradas relevantes en un juicio por asesinato, a la luz de argumentos probabilísticos similares a los descritos aquí. Véase A. Dershowitz, «The numbers game», *The New York Times* (30 de mayo de 1999), archivado en http://www.nytimes.com/1999/05/30/books/l-the-numbers-game-789356.html, y J. A. Paulos, «Once upon a number», *The New York Times* (27 de junio de 1999), http://www.nytimes.com/1999/06/27/books/l-once-upon-a-number-224537.html.

[107] De acuerdo con el informe del FBI, 4936 mujeres fueron asesinadas en 1992. De estas víctimas, 1432 (aproximadamente un 29 por ciento) fueron asesinadas por sus maridos o novios. Las 3504 restantes fueron asesinadas por otra persona. Por lo tanto, teniendo en cuenta que la población total de mujeres en Estados Unidos, en ese momento, era de 125 millones, la tasa de mujeres asesinadas por alguien que no era su pareja era de 3504 dividido entre 125 millones, es decir, 1 asesinato por cada 35 673 mujeres al año.

Asumamos que esta tasa de asesinatos de mujeres a manos de no parejas fuera la misma para todas las mujeres, maltratadas o no. En ese caso, en nuestra muestra hipotética de 100 00 mujeres maltratadas, esperaríamos alrededor de 100 00 dividido entre 35 673, es decir, 2,8 mujeres asesinadas por alguien que no sea su pareja. Redondeando el 2,8 a 3, obtenemos el estimado dado en el texto.

[108] Para una introducción a la búsqueda en Internet y al análisis de enlaces, véase D. Easley y J. Kleinberg, *Networks, Crowds, and Markets*, Cambridge, Cambridge University Press, 2010, cap. 14. Su elegante exposición ha inspirado mi enfoque aquí. Para un relato popular de la historia de la búsqueda en Internet, incluyendo relatos de los personajes principales y las empresas, véase J. Battelle, *The Search*, Nueva York, Portfolio, 2005 [trad. cast.: *Buscar*, Barcelona, Tendencias, 2006]. El desarrollo inicial del análisis de enlaces, para los lectores que se sientan cómodos con el álgebra lineal, se resume en S. Robinson, «The ongoing search for efficient Web search algorithms», *SIAM News*, vol. 37, n.º 9 (2004).

[109] Para cualquiera desconcertado con mi uso de la palabra «saltamontes», es un apodo cariñoso para un alumno que tiene mucho que aprender de su maestro zen. En la serie de televisión *Kung Fu*, en muchas de las ocasiones en las que el monje ciego Po imparte sabiduría a su alumno Caine, lo llama saltamontes, remontándonos a su primera lección, una escena del capítulo piloto de 1972 (que puede verse online en inglés en http://www.youtube.com/watch?v=WCyJRXvPNRo):

MAESTRO PO: Cierra los ojos. ¿Qué oyes?

JOVEN CAINE: Oigo el agua. Oigo los pájaros.

PO: ¿Oyes el latido de tu corazón?

CAINE: No.

PO: ¿Oyes el saltamontes que hay a tus pies?

CAINE: Viejo, ¿cómo es que oyes estas cosas?

PO: Joven, ¿cómo es que tú no?

[110] El reconocimiento del problema de la circularidad para clasificar páginas web y su solución a través del álgebra lineal surgió a partir de dos líneas de investigación publicadas en 1998. Una de ellas por mi colega de Cornell Jon Kleinberg, que trabajaba como científico visitante en el Centro de investigación IBM Almaden. Para su artículo inaugural sobre el algoritmo de «centros y autoridades» (una forma alternativa de análisis de enlaces que apareció poco antes del algoritmo PageRank de Google), véase J. Kleinberg, «Authoritative sources in a hyperlinked environment», *Proceedings of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (1998).

La otra línea de investigación era la de los fundadores de Google: Larry Page y Sergey Brin. Su método PageRank estuvo originalmente motivado por el pensamiento acerca de la proporción de tiempo que un internauta aleatorio pasaría en cada página de la Web, un proceso con una descripción diferente pero que lleva a la misma forma de resolver la definición circular. El ensayo fundacional de PageRank es S. Brin y L. Page, «The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine», *Proceedings of the Seventh International World Wide Web Conference* (1998), pp. 107-117.

Como ocurre a menudo en la ciencia, antecedentes sorprendentemente similares de estas ideas ya se habían descubierto en otros campos. Para esta prehistoria de PageRank en bibliometría, psicología, sociología y econometría, véase M. Franceschet, «PageRank: Standing on the shoulders of giants», *Communications of the ACM*, vol. 54, n.º 6 (2011), disponible en http://arxiv.org/abs/1002.2858; y S. Vigna, «Spectral ranking», http://arxiv.org/abs/0912.0238.

[111] Para quien busque una introducción al álgebra lineal y sus aplicaciones, los libros de Gil Strang y los vídeos online de sus clases son un buen comienzo: G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 4.ª ed., Wellesley, Massachusetts, Wellesley-Cambridge Press, 2009, y http://web.mit.edu/18.06/www/videos.html.

[112] Algunas de las aplicaciones más impresionantes del álgebra lineal se basan en las técnicas de descomposición de valor singular y análisis de componentes principales. Véase D. James, M. Lachance y J. Remski, «Singular vectors' subtle secrets», *College Mathematics Journal*, vol. 42, n.º 2 (marzo de 2011), pp. 86-95.

[113] Según Google, el término «PageRank» se refiere a Larry Page, no a «webpage» [página web]. Véase http://web.archive.org/web/20090424093934/http://www.google.com/press/funfacts.html.

[114] La idea aquí es que cualquier cara humana se puede expresar como una combinación de un pequeño número de ingredientes faciales fundamentales, o «eigenfaces». Esta aplicación del álgebra lineal para reconocimiento y clasificación de rostros fue desarrollada por L. Sirovich y M. Kirby, «Low-dimensional procedure for the characterization of human faces», *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 4 (1987), pp. 519-524, y desarrollado por M. Turk y A. Pentland, «Eigenfaces for recognition», *Journal of Cognitive Neuroscience*, vol. 3 (1991), pp. 71-86, también disponible online en http://cse.seu.edu.cn/people/xgeng/files/under/turk91eigenfaceForRecognition.pdf.

Para obtener una lista completa de artículos académicos en esta área, véase la página principal de Face Recognition (http://www.face-rec.org/interesting-papers/).

[115] L. Sirovich, «A pattern analysis of the second Rehnquist U.S. Supreme Court», *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 100, n.º 13 (2003), pp. 7432-7437. Para una mirada periodística de su trabajo, véase N. Wade, «A mathematician crunches the Supreme Court's numbers», *The New York Times* (24 de junio de 2003). Para una discusión dirigida a los estudiosos del derecho por un matemático y ahora profesor de derecho, véase P. H. Edelman, «The dimension of the Supreme Court», *Constitutional Commentary*, vol. 20, n.º 3 (2003), pp. 557-570.

[116] Para la historia del premio Netflix, con divertidos detalles sobre sus primeros concursantes y la importancia de la película *Napoleon Dynamite*, véase C. Thompson, «If you liked this, you're sure to love that — Winning the Netflix prize», *The New York Times Magazine* (23 de noviembre de 2008). El premio se ganó en septiembre de 2009, tres años después de que comenzara el concurso; véase S. Lohr, «A $1 million research bargain for Netflix, and maybe a model for others», *The New York Times* (22 de septiembre de 2009). La aplicación de la descomposición de valor singular para el Premio Netflix se analiza en B. Cipra, «Blockbuster algorithm», *SIAM News*, vol. 42, n.º 4 (2009).

[117] Para mayor simplicidad, solo he presentado la versión más básica del algoritmo de PageRank. Para gestionar las redes con ciertas características estructurales comunes, PageRank necesita ser modificado. Por ejemplo, suponga que la red tiene algunas páginas que apuntan a otras, pero que no tienen ninguna que apunte de vuelta. Durante el proceso de actualización, esas páginas perderán su PageRank, como si se tratara de una fuga o una hemorragia. Se lo dan a otros pero nunca se repone. Así que todos acaban con PageRanks de cero y, por lo tanto, serán indistinguibles en este respecto.

En el extremo contrario, considere redes en las que algunas páginas, o grupos de páginas, acumulan PageRank por ser cerradas, nunca enlazando de vuelta con nadie más. Esas páginas tienden a comportarse como sumideros para PageRank.

Para superar este y otros efectos, Brin y Page modificaron su algoritmo de la siguiente manera: tras cada paso en el proceso de actualización, todos los PageRanks actuales se reducen por un factor constante, de modo que el total es de menos de 1. Lo que sobre, se distribuye equitativamente entre todos los nodos de la red, como si les cayera del cielo. Es un acto eminentemente igualitario, repartir el PageRank a los nódulos necesitados. Joe, el fontanero, no estaría contento.

Para una mirada más profunda a la matemática de PageRank, con exploraciones interactivas, véase E. Aghapour, T. P. Chartier, A. N. Langville y K. E. Pedings, «Google PageRank: The mathematics of Google» (http://www.whydomath.org/node/google/index.html). Un acercamiento, tamaño libro, completo y a la vez accesible es A. N. Langville y C. D. Meyer, *Google's PageRank and Beyond*, Princeton, Princeton University Press, 2006.

[118] Harry Nilsson fue el autor de la canción «One». La versión que de ella hicieron Three Dog Night se convirtió en un éxito y alcanzó el número 5 de la lista Hot 100 de la revista *Billboard*. Aimee Mann tiene una versión fabulosa que puede oírse en la película *Magnolia*.

[119] P. Giordano, *The Solitude of Prime Numbers*, Nueva York, Pamela Dorman Books/Viking Penguin, 2010 [trad. cast.: *La soledad de los números primos*, Barcelona, Salamandra, 2011]. El fragmento aquí citado aparece en las pp. 111-112.

[120] Para introducciones populares a la teoría de números, y los misterios de los números primos en particular, lo más difícil es por dónde empezar. Existen por lo menos tres libros excelentes. Todos aparecieron, más o menos, a la vez y todos se centran en la hipótesis de Riemann, ampliamente contemplada como el gran problema irresuelto de las matemáticas. Para acercarse a algunos de los detalles matemáticos, junto con la historia inicial de la hipótesis de Riemann, recomiendo J. Derbyshire, *Prime Obsession*, Washington, D. C., Joseph Henry Press, 2003. Para mayor énfasis en los últimos avances, pero aún a nivel accesible, véase D. Rockmore, *Stalking the Riemann Hypothesis*, Nueva York, Pantheon, 2005, y M. du Sautoy, *The Music of the Primes*, Nueva York, HarperCollins, 2003 [trad. cast.: *La música de los números primos*, Barcelona, Acantilado, 2010].

[121] Para el uso de la teoría de números en criptografía, véase M. Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, Washington, D. C., Mathematical Association of America, 1997, caps. 13 y 14. El primero de estos capítulos reproduce la famosa columna que Gardner publicó en el número de agosto de 1977 de *Scientific American*, en la que hizo pública la naturaleza, prácticamente irrompible, del criptosistema RSA. En el segundo capítulo se describe el «furor intenso» que despertó dentro de la Agencia de Seguridad Nacional. Para los desarrollos más recientes, véase el cap. 10 de Du Sautoy, *The Music of the Primes*.

[122] Junto con los libros de Derbyshire, Rockmore y Du Sautoy antes mencionados, existen muchas fuentes de información online acerca del teorema de los números primos, como la página de Chris K. Caldwell «How many primes are there?» (http://primes.utm.edu/howmany.shtml), la página de MathWorld «Prime number theorem» (http://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html) y la página de Wikipedia «Prime number theorem» (http://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem) [la página en castellano es: «Teorema de los números primos» (http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_numeros_primos)].

[123] La historia de cómo reparó Gauss en el teorema de los números primos a los quince años se cuenta en las pp. 53-54 del libro de Derbyshire *Prime Obsession* y, en mayor detalle, en L. J. Goldstein, «A history of the prime number theorem», *American Mathematical Monthly*, vol. 80, n.º 6 (1973), pp. 599-615. Gauss no demostró el teorema, pero lo intuyó estudiando detenidamente tablas de números primos que había calculado —a mano— por diversión. Las primeras demostraciones se publicaron en 1896, cerca de un siglo después, por Jacques Hadamard y Charles de la Vallée Poussin, y ambos habían trabajado en el problema de manera independiente.

[124] ¿Cómo pueden existir los números primos gemelos en un gran N, a la luz del teorema de los números primos? El teorema dice que solo la brecha *media* es $\ln N$. Pero hay fluctuaciones alrededor de esta media, y dado que hay infinitos números primos, algunos de ellos están abocados a tener suerte y vencer las probabilidades. En otras palabras, aunque la mayoría no encontrará un número primo a una distancia menor que $\ln N$, algunos de ellos sí lo harán.

Los lectores que quieran ver a la matemática al mando de «los pequeños huecos entre números primos» explicado de manera concisa y hermosa, pueden consultar el artículo de Andrew Granville sobre teoría analítica de números en T. Gowers, *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton, Princeton University Press, 2008, pp. 332-348, especialmente p. 343.

Existe también un buen artículo online de Terry Tao que ofrece mucha información acerca de los números primos gemelos —concretamente, cómo se distribuyen y por qué los matemáticos creen que existen infinidad de ellos— y luego se sumerge en aguas más profundas para explicar la prueba de su célebre teorema (con Ben Green) de que los primos contienen progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Véase T. Tao, «Structure and randomness in the prime numbers», http://terrytao.wordpress.com/2008/01/07/ams-lecture-structure-and-randomness-in-the-prime-numbers/.

Para más detalles e información general acerca de los números primos gemelos, véase http://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime y http://mathworld.wolfram.com/TwinPrimeConjecture.html.

[125] Estoy bromeando, no tratando de hacer una observación seria sobre la separación entre pares consecutivos de primos gemelos. Tal vez, en algún lugar, muy abajo en la línea numérica, dos pares de gemelos resultan ser muy próximos entre sí. Para una introducción a estas cuestiones, véase I. Peterson, «Prime twins» (4 de junio de 2001), http://www.maa.org/mathland/mathtrek_6_4_01.html.

En cualquier caso, la metáfora de mostrar las parejas extrañas como números primos gemelos no se ha perdido en Hollywood. Para un entretenimiento ligero, puede alquilar la película *El amor tiene dos caras*, con Barbra Streisand y Jeff Bridges. Él es un profesor de matemáticas guapo, pero socialmente torpe. Ella es profesora de literatura inglesa, una mujer valiente, enérgica, pero familiar (al menos, así es como se supone que debemos verla), que vive con su madre y su hermosa hermana. Con el tiempo, los dos profesores logran quedar para una primera cita. Cuando

su conversación durante la cena se desplaza hacia el tema del baile (que le avergüenza), él cambia de tema abruptamente a los números primos gemelos. Ella capta la idea de inmediato y le pregunta: «¿Qué sucedería si contaras más allá de un millón? ¿Seguiría habiendo parejas así?». Él casi se cae de la silla y dice: «¡No puedo creerme que hayas pensado en eso! Eso es exactamente lo queda por demostrar en la conjetura de los primos gemelos». Más adelante, cuando empiezan a enamorarse, ella le hace un regalo de cumpleaños: unos gemelos marcados con números primos.

[126] El grupo de colchón técnicamente se conoce como el grupo de cuatro de Klein. Es una de las posibilidades más sencillas dentro de un enorme elenco. Los matemáticos han analizado grupos y clasificado sus estructuras durante más de doscientos años. Para una relación de acoplamiento de la teoría de grupos y la aventura más reciente para clasificar todos los grupos finitos simples, véase M. du Sautoy, *Symmetry*, Nueva York, Harper, 2008 [trad. cast.: *Simetría*, Barcelona, Acantilado, 2011].

[127] Dos libros recientes inspiraron este capítulo: N. Carter, *Visual Group Theory*, Washington, D. C., Mathematical Association of America, 2009, y B. Hayes, *Group Theory in the Bedroom*, Nueva York, Hill and Wang, 2008. Carter introduce las bases de la teoría de grupos de manera amable y pictórica. También se ocupa de su relación con el cubo de Rubik, los bailes de salón, los cristales, la química, el arte y la arquitectura. Una versión anterior del artículo de Hayes sobre voltear los colchones apareció en *American Scientist*, vol. 93, n.º 5 (septiembre/octubre de 2005), p. 395, y está disponible online en http://www.americanscientist.org/issues/pub/group-theory-in-the-bedroom.
Los lectores interesados en una definición de lo que es un «grupo» deberían consultar cualquiera de las referencias online autorizadas o manuales estándar sobre la materia. Un buen sitio para empezar es la página de MathWorld http://mathworld.wolfram.com/topics/GroupTheory.html, o la página de Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics) [el enlace a la página en castellano es: http://es.wikipedia.org/wiki/Teoria_de_grupos]. El enfoque que yo le he dado enfatiza los grupos simétricos en lugar de los grupos en un sentido más general.

[128] Michael Field y Martin Golubitsky han estudiado la interacción entre la teoría de grupos y la dinámica no lineal. En el curso de su investigación han generado impresionantes gráficos de ordenador del caos simétrico; muchos de ellos pueden verse en la página web de Mike Field: http://www.math.uh.edu/%7Emike/ag/art.html. Para el arte, la ciencia y las matemáticas ligadas a este tema, véase M. Field y M. Golubitsky, *Symmetry in Chaos*, 2.ª ed., Filadelfia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[129] Unas palabras sobre alguna notación potencialmente confusa utilizada a lo largo de este capítulo: en ecuaciones como $HR = V$, la H se escribe a la izquierda para indicar que su transformación se realiza primero. Carter utiliza esta notación para la composición funcional en su libro, pero el lector debe ser consciente de que muchos matemáticos utilizan la convención opuesta, colocar la H a la derecha.

[130] Para la anécdota acerca de Feynman y su psiquiatra, véase R. P. Feynman, *«Surely You're Joking, Mr. Feynman!»*, Nueva York, W. W. Norton and Company, 1985, p. 158 [trad. cast.: *¿Está ud. de broma, Sr. Feynman?*, Madrid, Alianza, 2013], y J. Gleick, *Genius*, Nueva York, Random House, 1993, p. 223.

[131] Arte, quintillas, patentes, trucos de salón y matemática seria, lo que sea, y si tiene algo que ver con cintas de Möbius, estará en el alegre libro de Cliff Pickover *The Möbius strip*, Nueva York, Basic Books, 2006 [trad. cast.: *La banda de Möbius*, Córdoba Almuzara, 2009]. Una generación anterior aprendió estas maravillas en M. Gardner, «The world of the Möbius strip: Endless, edgeless, and one-sided», *Scientific American*, vol. 219, n.º 6 (diciembre de 1968).

[132] Para instrucciones paso a paso, con fotografías, de algunas de las actividades descritas en este capítulo, véase «How to explore a Möbius strip» en http://www.wiki-how.com/Explore-a-Möbius-Strip. Julian Fleron da muchas otras ideas —guirnaldas, corazones, estrellas de papel— en «Recycling Möbius», http://artofmathematics.wsc.ma.edu/sculpture/workinprogress/Mobius1206.pdf.
Para divertirse aún más con modelos de papel, consulte el libro clásico de S. Barr, *Experiments in Topology*, Nueva York, Dover, 1964.

[133] Las bases de la topología se explican en R. Courant y H. Robbins (revisado por I. Stewart), *What Is Mathematics?*, 2.ª ed., Nueva York, Oxford University Press, 1996, cap. 5. Para un estudio divertido, véase M. Gardner, *The Colossal Book of Mathematics*, Nueva York, W. W. Norton and Company, 2001. Analiza botellas de Klein, nudos, donuts enlazados y otras delicias de la topología recreativa en la quinta parte, caps. 18-20. Un enfoque contemporáneo muy bueno es el de D. S. Richeson, *Euler's Gem*, Princeton, Princeton University Press, 2008. Richeson presenta una historia y una celebración de la topología y una introducción a sus conceptos principales, utilizando la fórmula del poliedro de Euler como pieza central. A un nivel muy superior, pero aún accesible a personas con bagaje matemático universitario, están los capítulos sobre topología algebraica y topología diferencial en T. Gowers, *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton, Princeton University Press, 2008, pp. 383-408.

[134] Teniendo en cuenta que un círculo y un cuadrado son curvas topológicamente equivalentes, se puede estar preguntando qué tipo de curvas podrían ser topológicamente diferentes. El ejemplo más sencillo es el segmento. Para demostrarlo, observe que si viaja en una dirección alrededor de un círculo, un cuadrado o cualquier otro tipo de bucle, siempre regresa al punto de partida, pero eso no es cierto para los viajes sobre un segmento. Puesto que esta propiedad permanece inalterada por todas las transformaciones que preservan la topología de un objeto (a saber, las deformaciones continuas cuya inversa también es continua), y dado que esta propiedad distingue entre bucles y segmentos, podemos concluir que los bucles y segmentos son topológicamente diferentes.
[135] Los vídeos de Vi que se analizan en este capítulo, «Möbius music box» y «Möbius story: Wind and Mr. Ug», se encuentran en YouTube y también en http://vihart.com/musicbox y http://vihart.com/blog/mobius-story/. Para más excursiones ingeniosas y divertidas a los mundos de la matemática: comida, garabatos, globos, abalorios y las cajas de música, véase su página web: http://vihart.com/everything/. Fue reseñada en K. Chang, «Bending and stretching classroom lessons to make math inspire», *The New York Times* (17 de enero de 2011), disponible online en http://www.nytimes.com/2011/01/18/science/18prof.html.
[136] Para ver imágenes del «arte de Möbius» en los trabajos de Maurits Escher, Max Bill y Keizo Ushio, busque en la Red utilizando el nombre del artista y «Möbius» como términos de búsqueda. Ivars Peterson ha escrito acerca del uso de las cintas de Möbius en literatura, arte, arquitectura y escultura, con fotografías y explicaciones en su blog *Mathematical Tourist:* http://mathtourist.blogspot.com/search/label/Moebius%20Strips.
[137] La biblioteca se encuentra en construcción. Para profundizar en su concepto de diseño y ver imágenes intrigantes de cómo será, consulte la página web del estudio de arquitectura BIG (Bjarke Ingels Group), http://www.big.dk/. Pinche sobre el icono ANL (Astana National Library); aparece en la columna de 2009 (la cuarta columna por la derecha) cuando los proyectos se ordenan por orden cronológico. Esta página contiene cuarenta y una diapositivas de la estructura interna y externa de la biblioteca, la circulación del museo, la exposición termal, etcétera, todas ellas poco comunes debido al diseño Möbius del edificio. Aparece una reseña de Bjarke Ingels y su trayectoria profesional en G. Williams, «Open source architect: Meet the maestro of “hedonistic sustainability”», http://www.wired.co.uk/magazine/archive/2011/07/features/open-source-architect.
[138] Algunas se tratan en Pickover, *The Möbius Strip*. Puede encontrar cientos más mediante la búsqueda de «cinta de Möbius» en Google Patents.
[139] Si quiere probar a cortar así un donut, George Hart explica la técnica en su página web http://www.georgehart.com/bagel/bagel.html. O puede ver una animación por ordenador en http://www.youtube.com/watch?v=hYXnZ8-ux80. Si prefiere verlo en tiempo real, consulte un vídeo de UltraNurd llamado «Möbius Bagel» (http://www.youtube.com/watch?v=Zu5z1BCC70s). Pero, estrictamente hablando, este no debería llamarse un «donut de Möbius», un punto de confusión entre muchas personas que han escrito sobre, o copiado, el trabajo de George. La superficie sobre la que se extiende la crema de queso no es equivalente a una cinta de Möbius, ya que tiene dos medias torsiones, no una, y la superficie resultante es de dos caras, no de una. Además, un verdadero donut Möbius permanecería en una pieza tras ser cortado, no en dos. Para una demostración de cómo cortar un donut de esta genuina forma, véase http://www.youtube.com/watch?v=l6Vuh16r8o8.
[140] Al hacer referencia a la geometría plana como la geometría «flatearth» [tierra plana], podría parecer que estoy menospreciando el tema, pero esa no es mi intención. La táctica de aproximar localmente una forma curvada a una plana a menudo ha resultado ser una simplificación útil en muchas partes de las matemáticas y la física, desde el cálculo a la teoría de la relatividad. La geometría plana es el primer ejemplo de esta gran idea.
Tampoco estoy sugiriendo que todos los antiguos pensaran que la tierra era plana. Para un relato atractivo de cómo Eratóstenes midió la distancia alrededor del mundo, véase N. Nicastro, *Circumference*, Nueva York, St. Martin’s Press, 2008. Para un enfoque más actual que quizá le apetezca probar, Robert Vanderbei, de la Universidad de Princeton, hizo una presentación a la clase de geometría de su hija en la que utilizó la fotografía de una puesta de sol para demostrar que la Tierra no es plana y para estimar su diámetro. Sus diapositivas están colgadas en http://orfe.princeton.edu/~rvdb/tex/sunset/34-39.OPN.1108twoup.pdf.
[141] Una gran introducción a la geometría moderna fue coescrita por David Hilbert, uno de los grandes matemáticos del siglo XX. Este clásico, originalmente publicado en 1952, se ha reeditado como D. Hilbert y S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, Washington, D. C., American Mathematical Society, 1999. Varios manuales y cursos online se citan en la página de Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry. [El enlace a la página en castellano es: http://es.wikipedia.org/wiki/Geometria_diferencial].
[142] Para una demostración interactiva online que le permite trazar la ruta más corta entre dos puntos en la superficie de la Tierra, véase http://demonstrations.wolfram.com/GreatCirclesOnMercatorsChart/. Tendrá que descargar el reproductor gratuito Mathematica, que le permitirá entonces explorar cientos de demostraciones interactivas de todos los campos matemáticos.

[143] Extractos de una serie de los fascinantes vídeos educativos de Polthier sobre temas matemáticos pueden encontrarse online en http://page.mi.fu-berlin.de/polthier/video/Geodesics/Scenes.html. Videos premiados de Polthier y sus colegas aparecen en la colección del festival VideoMath (htt://page.mi.fu-berlin.de/polthier/Events/VideoMath/index.html), disponible en DVD de Springer-Verlag. Más detalles en G. Glaeser y K. Polthier, *A Mathematical Picture Book*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer, 2012. Las imágenes que se muestran en el texto son del DVD *Touching Soap Films*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer, 1995, de Andreas Arnez, Konrad Polthier, Martin Steffens y Christian Teitzel.

[144] El algoritmo clásico para los problemas de la ruta más corta en redes fue creado por Edsger Dijkstra. Para una introducción, véase http://en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra's_algorithm. Steven Skiena ha publicado una instructiva animación del algoritmo de Dijkstra en http://www.cs.sunysb.edu/~skiena/combinatorica/animations/dijkstra.html.
La naturaleza puede resolver ciertos problemas de camino-más-corto mediante procesos descentralizados similares a la computación analógica. Para ondas químicas que resuelven laberintos, véase O. Steinbock, A. Toth y K. Showalter, «Navigating complex labyrinths: Optimal paths from chemical waves», *Science*, vol. 267 (1995), p. 868. Para no ser menos, los mohos mucilaginosos también pueden resolverlos: T. Nakagaki, H. Yamada y A. Toth, «Maze-solving by an amoeboid organism», *Nature*, vol. 407 (200), p. 470. Este organismo viscoso puede trazar redes tan eficientes como las del sistema ferroviario de Tokio: A. Tero et ál., «Rules for biologically inspired adaptive network design», *Science*, vol. 327 (2010), p. 439.

[145] Aparecen ejemplos maravillosos de memorias en seis palabras en http://www.smithmag.net/sixwords y en http://en.wikipedia.org/wiki/Six-Word_Memoirs.

[146] El análisis nació de la necesidad de apuntalar los fundamentos lógicos de cálculo. William Dunham recorre esta historia a través de las obras de once maestros —desde Newton hasta Lebesgue— en W. Dunham, *The Calculus Gallery*, Princeton, Princeton University Press, 2005. El libro contiene matemática explícita hecha accesible para lectores con formación universitaria. Un manual de espíritu similar es D. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*, 2.ª ed., Washington, D. C., Mathematical Association of America, 2006. Para una aproximación histórica más completa, véase C. B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Nueva York, Dover, 1959.

[147] La serie de Grandi $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ se analiza en un artículo de Wikipedia, con referencias meticulosas, acerca de su historia, con vínculos a temas adicionales sobre su estatus matemático y su papel en la educación matemática. A todo esto se puede acceder desde la página principal «Grandi's series»: http://en.wikipedia.org/wiki/Grandi's_series.

[148] Para una exposición clara del teorema de reordenamiento de Riemann, véase Dunham, *The Calculus Gallery*, pp. 112-115.

[149] La serie armónica alternada es condicionalmente convergente, lo que significa que es convergente, pero no absolutamente convergente (la suma de los valores absolutos de sus términos no convergen). Para una serie como esa, puede reordenar la suma para obtener cualquier número real. Esta es la implicación impactante del teorema de reordenamiento de Riemann. Esto demuestra que la suma convergente puede violar nuestras expectativas intuitivas si no converge *absolutamente*.
En el caso favorable de una serie absolutamente convergente, todos los reordenamientos de la serie convergen al mismo valor. Eso es totalmente conveniente. Significa que una serie absolutamente convergente se comporta como una suma finita. En particular, obedece a la propiedad conmutativa de la suma. Puede reorganizar los términos de la forma que desee sin tener que cambiar la respuesta. Para ampliar la información acerca de la convergencia absoluta, véase http://mathworld.wolfram.com/AbsoluteConvergence.html y http://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_convergence.

[150] El extraordinario libro de Tom Körner *Fourier Analysis* (Nueva York, Cambridge University Press, 1989) funciona como un escaparate de las ideas, técnicas, aplicaciones, y la historia del análisis de Fourier. El nivel de rigor matemático es alto, sin embargo el libro es ingenioso, elegante y gratamente peculiar. Para una introducción al trabajo de Fourier y su conexión con la música, véase M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, Oxford, Oxford University Press, 1974, cap. 19.

[151] El fenómeno de Gibbs y su tortuosa historia son analizados por E. Hewitt y R. E. Hewitt, «The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episo de in Fourier analysis», *Archive for the History of Exact Sciences*, vol. 21 (1979), pp. 129-160.

[152] El fenómeno de Gibbs puede afectar a las compresiones MPEG y JPEG de los vídeos digitales: http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_96/journal/vol4/sab/report.html. Cuando aparece en las resonancias magnéticas, el fenómeno de Gibbs se conoce como truncamiento o zumbido de Gibbs; véase http://www.mr-tip.com/serv1.php?type=art&sub=Gibbs%20Artifact. Para los métodos de manejo de estos artefactos véase T. B.

Smith y K. S. Nayak, «MRI artifacts and correction strategies», *Imaging Medicine*, vol. 2, n.º 4 (2010), pp. 445-457, online en http://mrel.usc.edu/pdf/Smith_IM_2010.pdf.

[153] Los analistas del siglo XIX identificaron la causa matemática subyacente al fenómeno de Gibbs. Para las funciones (o, en la actualidad, imágenes) que muestran bordes filosos u otros tipos leves de discontinuidades de salto, se demostró que las sumas parciales de las ondas sinusoidales convergían puntualmente, pero no de manera uniforme, a la función original. Convergencia puntual significa que en cualquier punto *x* en particular, las sumas parciales se acercan arbitrariamente a la función original, a medida que se agregan más términos. En ese sentido, la serie converge, como era de esperar. El problema es que algunos puntos son mucho más quisquillosos que otros. El fenómeno de Gibbs se produce cerca del peor de los puntos: los bordes de la función original.

Por ejemplo, considere la onda de diente de sierra descrita en este capítulo. Cuando *x* se acerca al borde de un diente de sierra, se necesitan más y más términos de la serie de Fourier para alcanzar un determinado nivel de aproximación. Eso es lo que queremos decir cuando afirmamos que la convergencia no es uniforme. Se produce a diferentes velocidades para diferentes *x*.

En este caso, la no uniformidad de la convergencia se puede atribuir a las patologías de la serie armónica alterna, cuyos términos aparecen como coeficientes de Fourier de la onda de diente de sierra. Como se expuso anteriormente, la serie armónica alterna converge, pero solo por la cancelación masiva provocada por su mezcla alterna de términos positivos y negativos. Si todos sus términos se hicieran positivos tomando su valor absoluto, la serie se desviaría (la suma se acercaría a infinito). Por eso se dice que la serie armónica alterna converge de manera *condicional*, no *absoluta*. Esta forma precaria de convergencia luego infecta la serie de Fourier correspondiente y lo hace de manera no uniforme convergente, lo que conduce al fenómeno de Gibbs y su dedo burlón alzado cerca del borde.

De lo contrario, en el caso mejor que la serie de coeficientes de Fourier sea absolutamente convergente, la serie asociada de Fourier converge uniformemente a la función original. Entonces, el fenómeno de Gibbs no ocurre. Para más detalles véase http://mathworld.wolfram.com/GibbsPhenomenon.html y http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon.

La conclusión es que los analistas nos enseñaron a desconfiar de series condicionalmente convergentes. La convergencia es buena, pero no es suficiente. Para que una serie infinita se comporte como una suma finita en todos los aspectos, necesita limitaciones mucho más estrictas que las que puede proporcionar la convergencia condicional. Insistir en la convergencia absoluta produce el comportamiento que cabría esperar intuitivamente, para la propia serie y para su serie Fourier asociada.

[154] Para más información acerca de Cantor, incluyendo las controversias matemáticas, filosóficas y teológicas que rodean su obra, véase J. W. Dauben, *Georg Cantor*, Princeton, Princeton University Press, 1990.

[155] Si aún no lo ha leído, le recomiendo el sorprendente éxito de ventas *Logicomix*, una novela gráfica brillante sobre la teoría de conjuntos, la lógica, el infinito, la locura y la búsqueda de la verdad matemática: A. Doxiadis y C. H. Papadimitriou, *Logicomix*, Londres, Bloomsbury, 2009 [trad. cast.: *Logicomix: una búsqueda épica de la verdad*, Madrid, Sins Entido, 2011]. Está protagonizada por Bertrand Russell, pero Cantor, Hilbert, Poincaré y muchos otros hacen apariciones memorables.

[156] La biografía clásica de David Hilbert es un relato conmovedor y no técnico de su vida, su obra y su época: C. Reid, *Hilbert*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer, 1996. Las contribuciones de Hilbert a las matemáticas son demasiado numerosas para mencionarlas aquí, pero tal vez su mayor logro sea su colección de veintitrés problemas —todos irresueltos cuando los propuso— que él pensaba que forjarían el rumbo de las matemáticas en el siglo XX. Para profundizar en la historia en curso y la importancia de estos problemas de Hilbert, y de las personas que resolvieron algunos de ellos, véase B. H. Yandell, *The Honors Class*, Natick, Massachusetts, A K Peters, 2002. Muchos de los problemas que planteó Hilbert permanecen abiertos.

[157] La parábola del hotel infinito de Hilbert se menciona en la perenne obra maestra de George Gamow *One Two Three… Infinity*, Nueva York, Dover, 1988, p. 17 [trad. cast.: *Un, dos, tres… infinito*, Barcelona, RBA, 1993]. Gamow también explica muy bien los conjuntos contables e incontables e ideas relacionadas con ellos sobre el infinito.

Las posibilidades cómicas y dramáticas del hotel Hilbert han sido a menudo exploradas por los escritores de ficción matemática. Véase, por ejemplo, S. Lem, «The extraordinary hotel or the thousand and first journey of Ion the Quiet», reimpreso en W. Frucht (ed.), *Imaginary Numbers*, Hoboken, Nueva Jersey, Wiley, 1999, e I. Stewart, *Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities*, Nueva York, Basic Books, 2009. Un libro infantil sobre el mismo tema es I. Ekeland, *The Cat in Numberland*, Chicago, Cricket Books, 2006.

[158] Una pequeña sutileza dio pie a que, con el argumento de la incontabilidad de los números reales, exigiera que los dígitos diagonales se reemplazaran por dígitos entre 1 y 8. Esto no era esencial, pero yo quería evitar utilizar el 0 y el 9 para eludir cualquier inquietud causada por el hecho de que algunos números reales tienen dos representaciones

decimales. Por ejemplo, 0,20000… es igual a 0.199999… Por tanto, si no hubiéramos excluido el uso de ceros y nueves como dígitos de reemplazo, es concebible que el argumento diagonal pudiera haber producido, inadvertidamente, un número que ya está en la lista (y eso habría arruinado la prueba). Puesto que había prohibido el uso de 0 y 9, no tuvimos que preocuparnos de esta molestia.

[159] Para un análisis más matemático, pero muy legible, sobre el infinito (y muchas otras ideas analizadas en este libro), véase J. C. Stillwell, *Yearning for the Impossible*, Natick, Massachusetts, A K Peters, 2006. Los lectores que quieran profundizar aún más en el infinito, pueden disfrutar de la publicación en el blog de Terry Tao acerca de objetos contraproducentes, http://terrytao.wordpress.com/2009/11/05/the-no-self-defeating-object-argument/. Presenta de manera accesible y aclara muchos argumentos fundamentales acerca del infinito que se plantean en la teoría de conjuntos, la filosofía, la física, la informática, la teoría de juegos y la lógica. Para un estudio de las cuestiones fundamentales planteadas por este tipo de ideas, véase también J. C. Stillwell, *Roads to Infinity*, Natick, Massachusetts, A K Peters, 2010.